Séminaire BOURBAKI Mars 2017
69e année, 2016–2017, no 1129, p. 297 à 332
doi:10.24033/ast.1067

AVANCÉES CONCERNANT LES R-MATRICES ET LEURS APPLICATIONS [d'après Maulik-Okounkov, Kang-Kashiwara-Kim-Oh, ...]

par **David HERNANDEZ**

INTRODUCTION

Les R-matrices sont les solutions de l'équation de Yang-Baxter. À l'origine de la théorie des groupes quantiques, elles peuvent être interprétées comme des opérateurs d'entrelacement. Très récemment, des avancées ont été réalisées indépendamment dans différentes directions. Maulik-Okounkov ont donné une approche géométrique des R-matrices avec de nouveaux outils de géométrie symplectique, les enveloppes stables. Kang-Kashiwara-Kim-Oh ont prouvé une conjecture de catégorification des algèbres amassées en s'appuyant de manière cruciale sur des R-matrices. Enfin, une meilleure compréhension de l'action des matrices de transfert issues de R-matrices a permis de démontrer plusieurs conjectures sur les systèmes intégrables quantiques associés.

L'équation de Yang-Baxter

$$\mathscr{R}_{12}(z)\mathscr{R}_{13}(zw)\mathscr{R}_{23}(w) = \mathscr{R}_{23}(w)\mathscr{R}_{13}(zw)\mathscr{R}_{12}(z)$$

porte sur une série de Laurent

$$\mathscr{R}(z) \in (\mathscr{A} \otimes \mathscr{A})((z))$$

à coefficients dans le carré tensoriel d'une algèbre $\mathscr{A}$ qu'on supposera complexe. Ici on utilise la notation standard

$$\mathscr{R}_{12}(z) = \mathscr{R}(z) \otimes 1, \mathscr{R}_{23}(z) = 1 \otimes \mathscr{R}(z), \mathscr{R}_{13}(z) = (P \otimes \mathrm{Id})(\mathscr{R}_{23}(z)),$$

avec P l'opérateur de symétrie tel que

$$P(x \otimes y) = y \otimes x.$$

(*) Soutenu partiellement par le Conseil Européen de la Recherche dans le cadre du programme de l'Union Européenne H2020 avec la Grant ERC 647353 QAffine.

Les termes de l'équation de Yang-Baxter sont ainsi des éléments de $(\mathscr{A}^{\otimes 3})((z,w))$. Une solution est appelée R-matrice, ou R-matrice affine dans la mesure où elle dépend d'un paramètre z, appelé lui-même paramètre spectral (ou affine).

Cette équation a pour origine la théorie des systèmes intégrables (quantiques). Elle a aussi été considérablement étudiée dans divers domaines, notamment en théorie des représentations et en topologie (on pourra se reporter aux exposés [**64, 69**]). La théorie des groupes quantiques a été conçue pour apporter une réponse au problème de la construction de telles R-matrices.

1. CONSTRUCTION ALGÉBRIQUE

1.1. Exemple fondamental

Commençons par l'exemple fondamental suivant pour l'algèbre $\mathscr{A} = \mathrm{End}(V)$ avec V espace vectoriel complexe de dimension 2 de base $\mathscr{B}$. Pour $q \in \mathbb{C}^*$, on a la R-matrice écrite dans la base de $V \otimes V$ naturellement associée à $\mathscr{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & \frac{1-q^{-2}}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & \frac{z(1-q^{-2})}{z-q^{-2}} & \frac{q^{-1}(z-1)}{z-q^{-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in (\mathrm{End}(V^{\otimes 2}))((z)) \simeq (\mathscr{A}^{\otimes 2})((z)). \tag{1}$$

En considérant la matrice extraite (après avoir supprimé les premières et dernières lignes et colonnes), en posant $z = e^u$, $q = e^{h/2}$ et en prenant u et h proches de 0, on obtient la fameuse « R-matrice de Yang » :

$$\frac{1}{u+h}\begin{pmatrix} u & h \\ h & u \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La R-matrice (1) est apparue historiquement en physique statistique dans le cadre de l'étude du modèle à 6 sommets introduit par Pauling (1935), qui permet notamment de décrire le cristal de la glace. L'étude de ce modèle est étroitement liée à celle d'un autre modèle, en physique statistique quantique, appelé modèle XXZ de Spin $1/2$, dit de Heisenberg quantique (1928). Il modélise des chaînes de spins magnétiques quantiques ayant deux états classiques, haut ou bas.

Ces deux modèles, modèle à 6 sommets et modèle XXZ, figurent parmi les plus étudiés en physique statistique et quantique. Les structures mathématiques qui les sous-tendent sont très proches et font intervenir l'algèbre affine quantique $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{sl}}_2)$ associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Cette algèbre possède une famille de représentations simples V de dimension 2 dites « représentations fondamentales ». La R-matrice (1) est obtenue à partir de telles représentations. Mais la théorie des groupes quantiques en produit beaucoup d'autres, selon qu'on change l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ou la représentation V. Elles correspondent à autant de systèmes quantiques.

1.2. R-matrices universelles

L'exemple présenté ci-dessus se généralise avec la procédure suivante pour construire de grandes familles de R-matrices. On suppose dans la suite que $q \in \mathbb{C}^*$ n'est pas une racine de 1. À une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie $\mathfrak{g}$ sont associées :

– d'une part l'algèbre de Kac-Moody affine $\hat{\mathfrak{g}} = \mathscr{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c$ (voir l'exposé [**22**, section 3.1]) définie comme l'extension centrale universelle de l'algèbre des lacets

$$\mathscr{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$$

– d'autre part l'algèbre quantique $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$ (le groupe quantique au sens de Drinfeld et Jimbo, voir l'exposé [**64**]) qui est une algèbre de Hopf et une q-déformation de l'algèbre enveloppante $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$.

Lorsqu'on considère simultanément ces deux types de généralisations des algèbres de Lie, on obtient l'algèbre affine quantique $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Il s'agit d'une algèbre de Hopf, elle est notamment munie d'un coproduit, un morphisme d'algèbre

$$\Delta : \mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \to \mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes \mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$$

qui permet de définir une structure de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module sur le produit tensoriel de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-modules.

Drinfeld [**15**] a démontré (preuve précisée par la suite par Beck [**6**] et Damiani [**12**]) que $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ peut non seulement être obtenue comme quantification de $\mathscr{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, mais également, par un autre procédé, comme affinisation du groupe quantique $\mathscr{U}_q(\mathfrak{g})$. Il s'agit de la réalisation de Drinfeld des algèbres affines quantiques. Ceci peut être vu de manière informelle sous la forme du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{\mathfrak{g}} \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"] & \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation}"] \arrow[dr, dashed, "\text{Quantification}"'] & & \mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \\
 & \mathscr{U}_q(\mathfrak{g}). \arrow[ur, dashed, "\text{Affinisation quantique}"'] &
\end{tikzcd}$$

On dispose ainsi de deux présentations distinctes définissant des algèbres isomorphes (la présentation originelle de Drinfeld-Jimbo et la présentation de Drinfeld). Il s'agit d'un analogue quantique d'un théorème classique de Kac et Moody pour les algèbres de Kac-Moody affines (voir [**32**, chapitre 7]).

La réalisation de Drinfeld permet de munir l'algèbre $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ d'une $\mathbb{Z}$-graduation naturelle. À cette graduation correspondent des automorphismes τ_a de l'algèbre $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ pour $a \in \mathbb{C}^*$, ainsi qu'un automorphisme τ_z de l'algèbre $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})(z)$ pour z une indéterminée, tels que pour $g \in \mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ homogène de degré $m \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\tau_a(g) = a^m g \text{ et } \tau_z(g) = z^m g.$$

THÉORÈME 1.1 (Drinfeld). — *L'algèbre $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ possède une R-matrice universelle, c'est-à-dire une solution non triviale de l'équation de Yang-Baxter dans le produit tensoriel complété*

$$\mathscr{R}(z) \in [\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}}) \hat{\otimes} \mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})][[z]].$$

De plus pour V et W représentations de dimension finie de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, l'image

$$(\rho_V \otimes \rho_W)(\mathscr{R}(z)) = \mathscr{R}_{V,W}(z) \in (\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(W))[[z]]$$

par les morphismes de représentation ρ_V et ρ_W est bien définie et

$$P \circ \mathscr{R}_{V,W}(z) : (V \otimes W)[[z]] \to (W \otimes V)[[z]]$$

est un morphisme de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module ($P$ est l'opérateur de symétrie comme ci-dessus et l'action sur V est tordue par l'automorphisme τ_z).

Enfin on a les relations

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta)(\mathscr{R}(z)) = \mathscr{R}_{13}(z)\mathscr{R}_{12}(z) \text{ et } (\Delta \otimes \mathrm{Id})(\mathscr{R}(z)) = \mathscr{R}_{13}(z)\mathscr{R}_{23}(z). \tag{3}$$

On obtient ainsi des opérateurs d'entrelacement. Lorsque $V = W$, $\mathscr{R}_{V,V}(z)$ est une R-matrice.

Remarque 1.2. — La notion de produit tensoriel complété $\hat{\otimes}$ mentionnée ci-dessus est définie en utilisant certaines filtrations de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Nous ne précisons pas davantage car cette notion n'intervient que pour les R-matrices universelles et pas pour les R-matrices $\mathscr{R}_{V,W}(z)$ (ni pour les matrices de transfert) étudiées dans la suite de l'exposé.

Remarque 1.3. — Les conventions sur la $\mathbb{Z}$-graduation de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ évoquée ci-dessus font que $\mathscr{R}(z)$ ne fait effectivement intervenir que des puissances positives de z.

Preuve (esquisse). — La preuve de Drinfeld repose sur la réalisation de $\mathscr{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$ comme quotient du double d'une sous-algèbre de Hopf (analogue d'une sous-algèbre de Borel). Le double $D(A)$ d'une algèbre de Hopf A est l'espace vectoriel $A \otimes A^0$ avec A^0 l'algèbre de Hopf duale de A. $D(A)$ est alors muni d'une structure d'algèbre de Hopf qui possède automatiquement une R-matrice universelle (voir l'exposé [**64**, section 3]). □

1.3. R-matrices normalisées

On a la propriété de rationalité suivante.

Proposition 1.4. — *Pour V et W des représentations simples de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$, il existe une série de Laurent scalaire, $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}((z))$, telle que le produit*

$$f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z) \in (\mathrm{End}(V \otimes W))(z)$$

est une fonction rationnelle de z.

Preuve (esquisse). — On peut par exemple utiliser l'argument de [**16**, section 9.2] (voir aussi [**26**]). Soient v, w des vecteurs de plus haut poids respectivement de V et de W (relativement à un analogue d'une sous-algèbre de Cartan dans $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$). Il existe alors une unique $f_{V,W}(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ telle que

$$(f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)).(v \otimes w) = v \otimes w. \tag{4}$$

La représentation $(V \otimes W) \otimes \mathbb{C}((z))$ de $\mathcal{U}_q(\mathfrak{g})((z))$ est simple (c'est ce qu'on appelle la simplicité générique du produit tensoriel). Ainsi le fait que $f_{V,W}(z)P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z)$ est un opérateur d'entrelacement se traduit par un système d'équations linéaires dont les solutions sont rationnelles. □

Remarque 1.5. — On obtient l'unicité de la série de Laurent $f_{V,W}(z)$ en imposant la relation (4). C'est ce que nous ferons par la suite. Le morphisme rationnel $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$ admet un inverse qui est alors

$$(f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z))^{-1} = f_{W,V}(z^{-1})(P \circ \mathcal{R}_{W,V}(z^{-1}) \circ P).$$

Nous nous intéresserons particulièrement au cas des représentations fondamentales $V_i(a)$ de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$. Elles sont paramétrées par $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a \in \mathbb{C}^*$ où n est le rang de $\mathfrak{g}$. On pourra se reporter à [**10**, chapitre 12.2] pour des généralités sur les représentations de dimension finie de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$.

Soit $R \geq 0$ l'ordre de 1 comme pôle de $f_{V,W}(z)\mathcal{R}_{V,W}(z)$. Alors la limite

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)^R f_{V,W}(z)P \circ \mathcal{R}_{V,W}(z)] : V \otimes W \to W \otimes V \tag{5}$$

est un morphisme de $\mathcal{U}_q(\hat{\mathfrak{g}})$-module non nul (si V et W ne le sont pas).

Définition 1.6. — *La limite* (5) *est appelée R-matrice normalisée et notée*

$$\mathcal{R}^{\mathrm{norm}}_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V.$$