

FLEXIBILITÉ EN GÉOMÉTRIE DE CONTACT  
EN GRANDE DIMENSION  
[d’après Borman, Eliashberg et Murphy]

par Patrick MASSOT

## 1. INTRODUCTION

Le but principal de ce texte est d’expliquer le théorème suivant, démontré en 2014 par Matthew Strom Borman, Yakov Eliashberg et Emmy Murphy et qui répond à une question remontant au moins à [10].

THÉORÈME 1.1 ([5]). — *Toute structure presque de contact est homotope à une structure de contact.*

En fait le théorème précédent fonctionne aussi à paramètres pour une classe particulière de structures de contact, dites vrillées, que l’on trouve dans toutes les classes d’homotopie de structures presque de contact. En particulier deux telles structures sont homotopes parmi les structures de contact si et seulement si elles le sont parmi les structures presque de contact.

### 1.1. Le $h$ -principe

Avant de rappeler ce que sont les structures de contact et presque de contact, il est utile de rappeler le contexte plus général de la dichotomie dégagée par M. Gromov entre les problèmes géométriques flexibles et rigides. Il s’agit ici de préciser sur des exemples la définition floue suivante : on dit qu’un problème de construction géométrique vérifie le  $h$ -principe de Gromov si les seules obstructions à sa résolution sont de nature homotopique. La section 3 présente un cadre général permettant d’énoncer ce principe.

Un des problèmes les plus simples vérifiant le  $h$ -principe est celui des déformations d’immersions du cercle  $\mathbb{S}^1$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . Le problème géométrique est ici : étant données deux immersions  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  du cercle dans le plan, peut-on déformer  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$

parmi les immersions? À toute immersion  $\gamma$  du cercle dans le plan, on peut associer  $G(\gamma) : \theta \mapsto \dot{\gamma}(\theta)/|\dot{\gamma}(\theta)|$  qui est une application du cercle dans le cercle. Si  $\gamma_0$  se déforme en  $\gamma_1$  parmi les immersions alors  $G(\gamma_0)$  et  $G(\gamma_1)$  sont homotopes donc ont même degré. Le problème de départ présente donc une obstruction homotopique :  $\deg(G(\gamma_0)) - \deg(G(\gamma_1))$  qui vit naturellement dans le groupe d'homotopie  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ . Le théorème de Whitney-Graustein [45] affirme qu'il n'y a pas d'obstruction géométrique : on peut réaliser géométriquement la déformation dès lors que l'obstruction homotopique s'annule. Un aspect important de cette discussion est le passage par un découplage entre une application lisse et sa dérivée. Il n'y a aucun problème à déformer  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$  sans se soucier de l'annulation de la dérivée pendant la déformation,  $\gamma_t(\theta) = (1-t)\gamma_0(\theta) + t\gamma_1(\theta)$  fait l'affaire. Par ailleurs la théorie élémentaire des revêtements montre que l'annulation de l'obstruction homotopique est équivalente à l'existence d'une déformation reliant  $G(\gamma_0)$  à  $G(\gamma_1)$  parmi les applications du cercle dans le cercle, ou encore à l'existence d'une déformation  $t \mapsto \Gamma_t$  reliant  $\dot{\gamma}_0$  à  $\dot{\gamma}_1$  parmi les applications du cercle dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On obtient ainsi un chemin de couples  $(\gamma_t, \Gamma_t)$  reliant  $(\gamma_0, \dot{\gamma}_0)$  à  $(\gamma_1, \dot{\gamma}_1)$  mais sans garder la contrainte, dite d'holonomie, que le deuxième élément du couple est la dérivée du premier. Le cœur du théorème de Whitney-Graustein est d'affirmer qu'un tel chemin est toujours homotope, à extrémités fixées, à un chemin holonome. Le cadre naturel pour discuter cette notion d'holonomie est celui des espaces de jets d'Ehresmann, comme on l'expliquera dans la section 3. Les sections de ces espaces de jets fournissent une notion générale de solution formelle, c'est-à-dire de solution où les dérivées sont considérées comme des variables indépendantes.

À l'opposé du  $h$ -principe, on dit qu'un problème est rigide s'il existe des obstructions en plus de ce que fournit la théorie de l'homotopie ou, plus précisément, que l'existence d'une solution formelle n'implique pas l'existence d'une solution authentique. Un exemple très élémentaire est celui des immersions du cercle dans la droite. Il existe bel et bien des applications du cercle dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  mais aucune d'entre elles n'est homotope à une application de la forme  $\theta \mapsto (f(\theta), f'(\theta))$ .

La philosophie du  $h$ -principe et les techniques générales servant à démontrer des résultats de  $h$ -principe ont des applications bien au-delà de la topologie différentielle, comme expliqué par exemple dans l'exposé [44] de ce séminaire.

## 1.2. Les structures de contact

Les structures de contact sont des champs d'hyperplans sur des variétés différentiables réelles de dimension impaire qui apparaissent naturellement dans de nombreux contextes incluant l'étude des équations aux dérivées partielles d'ordre un, l'optique géométrique, la thermodynamique, la théorie du contrôle, la dynamique hamiltonienne

et la géométrie complexe. On appelle champ d'hyperplans sur une variété  $M$  un sous-fibré de corang 1 du fibré tangent  $TM$ . Dans toute la suite, on évitera des discussions pénibles en supposant que tous les champs d'hyperplans sont coorientés. Sous cette hypothèse, un champ d'hyperplans  $\xi$  se laisse décrire comme le champ des noyaux d'une 1-forme  $\alpha$  globale, coorienté par  $\alpha$  (les vecteurs pointant du côté positif de  $\xi$  sont ceux sur lesquels  $\alpha$  est positive). Deux telles formes se déduisent l'une de l'autre par multiplication par une fonction strictement positive. On dit que  $\xi$  est de contact si la dérivée extérieure  $d\alpha$  restreinte à  $\xi$  est symplectique en tout point  $m$ , c'est-à-dire que l'application de  $\xi_m$  dans son dual  $\xi_m^*$  qui envoie  $v$  sur  $d\alpha(v, \cdot)$  est un isomorphisme. On dit alors que  $\alpha$  est une forme de contact. Cette propriété ne dépend que de  $\xi$  et pas du choix de  $\alpha$  parmi les 1-formes ayant  $\xi$  pour noyau car  $d(f\alpha)|_{\ker \alpha} = fd\alpha|_{\ker \alpha}$  pour toute fonction  $f$ . Une variété de contact  $(M, \xi)$  est une variété équipée d'une structure de contact. Les hyperplans  $\xi$  sont alors équipés de la classe conforme de structures symplectiques constituée de tous les  $d\alpha|_{\xi}$ . La condition de contact sur  $\alpha$  est équivalente à l'exigence que  $\alpha \wedge d\alpha^n$  soit une forme volume. En particulier la variété ambiante est orientable. Si on fixe à l'avance une orientation de la variété alors une structure de contact coorientée est dite positive si les formes volumes ainsi obtenues le sont.

La version formelle d'une structure de contact (coorientée et positive) sur une variété orientée  $M$  est une structure presque de contact, c'est-à-dire une paire  $(\xi, [\omega])$  où  $\xi$  est un champ d'hyperplans coorienté et  $[\omega]$  est une classe conforme de 2-formes dont les restrictions à  $\xi$  sont symplectiques et y définissent une orientation qui se combine avec la coorientation de  $\xi$  pour fournir l'orientation de  $M$ . Autrement dit, on exige que  $\alpha \wedge \omega^n$  soit une forme volume positive pour toute équation  $\alpha$  de  $\xi$  et tout représentant  $\omega$  de la classe conforme. Dans la suite on utilisera souvent une seule lettre (en général  $\zeta$ ) pour désigner une paire  $(\xi, [\omega])$ . La discussion du paragraphe précédent permet d'identifier les structures de contact à des structures presque de contact particulières. On insistera parfois sur la différence en parlant de structures presque de contact et de structures de contact *authentiques*. Comme dans la discussion des immersions du cercle, le passage au cas formel général correspond bien à une perte d'exigence d'holonomie : on ne demande aucun lien entre  $\omega$  et  $d\alpha$ . L'existence d'une structure presque de contact sur une variété  $M$  est équivalente à l'existence d'une réduction du groupe structural de  $TM$  de  $GL_{2n+1}(\mathbb{R})$  à  $U(n) \times \{1\}$ , c'est d'ailleurs sous cette forme qu'elles apparaissent dans [10]. Il s'agit bien d'un problème purement homotopique.

Historiquement les structures de contact sont apparues chez S. Lie dans le contexte des équations aux dérivées partielles d'ordre un. Plus exactement les « transformations de contact » (Berührungstransformationen) de Lie sont des difféomorphismes préservant une structure de contact naturelle sur les fibrés de 1-jets de fonctions. On

pourra consulter à ce sujet le préluce de l'exposé [29] et l'article [26]. En référence à cette histoire, on nomme encore « transformations de contact » d'une variété de contact  $(M, \xi)$  les difféomorphismes de  $M$  qui préservent  $\xi$ .

D'autres structures de contact proviennent de la géométrie complexe. Par exemple, si  $V$  est une variété algébrique affine lisse de dimension complexe  $n$  dans  $\mathbb{C}^N$  alors son intersection avec presque toute sphère euclidienne est une sous-variété réelle lisse  $\Sigma$  de dimension réelle  $2n - 1$ . En tout point  $\sigma$  de  $\Sigma$ , le sous-espace complexe maximal contenu dans  $T_\sigma \Sigma$  est l'hyperplan réel  $\xi_\sigma = T_\sigma \Sigma \cap iT_\sigma \Sigma$ . La collection de ces hyperplans est une structure de contact.

Les structures de contact sont indissolublement liées aux structures symplectiques. Une forme symplectique sur une variété réelle  $X$  est une 2-forme différentielle  $\omega$  fermée et non dégénérée, ce qui signifie qu'en tout point  $x$ ,  $\omega_x$  est symplectique, au sens de l'algèbre linéaire, sur  $T_x X$ . Par exemple, sur le cotangent  $T^*N$  de n'importe quelle variété réelle  $N$ , la forme de Liouville  $\lambda$  est la 1-forme qui, en tout  $p$  dans  $T^*N$  vaut  $p \circ \pi_*$  où  $\pi$  est la projection de  $T^*N$  sur  $N$ . Sa dérivée extérieure  $d\lambda$  est une forme symplectique. Si on munit chaque fibre de  $T^*N$  d'un produit scalaire, la restriction de  $\lambda$  à chaque fibré en sphères  $y$  définit une structure de contact. De façon plus invariante, le quotient du complémentaire de la section nulle de  $T^*N$  par l'action des homothéties dans les fibres est une variété de contact. On obtient ainsi des exemples de variétés de contact en partant de variétés symplectiques. Dans l'autre sens, un champ d'hyperplans  $\xi$  sur une variété  $N$  est de contact si et seulement si l'ensemble des éléments non nuls de  $T^*N$  qui s'annulent sur  $\xi$  est une sous-variété symplectique de  $T^*N$ . On obtient ainsi, à partir d'une variété de contact, une variété symplectique qu'on appelle sa symplectisation.

Au contraire des structures riemanniennes, les structures de contact n'ont pas d'invariants locaux, c'est le théorème de Darboux-Pfaff : toute variété de contact de dimension  $2n + 1$  est localement isomorphe à  $\mathbb{R}^{2n+1}$  muni de sa structure de contact standard  $\xi_{\text{std}} = \ker \lambda_0$  où

$$\lambda_0 = dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i - y_i dx_i.$$

Ces structures n'ont pas non plus de déformations non triviales, au moins si la variété ambiante  $V$  est compacte sans bord : pour toute structure de contact  $\xi$  sur  $V$ , l'application du groupe des difféomorphismes  $\text{Diff}(V)$  dans l'espace des structures de contact sur  $V$  qui envoie  $\varphi$  sur  $\varphi_* \xi$  est une fibration localement triviale. En particulier, la propriété de relèvement des chemins pour cette fibration assure que tout chemin  $\xi_t$ ,  $t \in [0, 1]$  issu de  $\xi$  est de la forme  $(\varphi_t)_* \xi$  pour un chemin de difféomorphisme  $\varphi_t$  issu de l'identité, c'est le théorème de Gray.

### 1.3. Rigidité et flexibilité

Au-delà de ses interactions avec d'autres branches des mathématiques, l'attractivité de la géométrie de contact (ou symplectique) provient d'un mélange subtil de problèmes vérifiant le  $h$ -principe et de problèmes rigides. Ainsi Eliashberg écrit dans [18] :

Rigid and flexible results coexist in many areas of geometry, but nowhere else do they come so close to each other, as in symplectic topology, which serves as a rich source of examples on both sides of the flexible-rigid spectrum. Flexible and rigid problems and the development of each side toward the other shaped and continue to shape the subject of symplectic topology from its inception.

Dès les années 60 V. Arnold commence à énoncer dans [1] une série de conjectures du côté rigide tandis que Gromov démontre de nombreux théorèmes généraux de  $h$ -principe, en commençant dans [30], qui s'appliquent en particulier en géométrie symplectique et de contact. Comme on l'expliquera dans la section 3, ces théorèmes règlent complètement la question de l'existence des structures de contact sur les variétés ouvertes, c'est-à-dire les variétés dont aucune composante connexe n'est compacte. Toute structure presque de contact sur une telle variété est homotope à une structure de contact authentique. Dans les années 70, [36] et [37] ont étendu ce résultat aux variétés fermées, c'est-à-dire compactes sans bord, de dimension 3. Jusqu'en 2012, la question de l'existence en grande dimension n'a ensuite connu que des résultats sporadiques, notamment dans [24] concernant les variétés de dimension cinq simplement connexes et [6] qui démontre en particulier l'existence de structures de contact sur tous les tores de dimension impaire. En 2012 cette question fut réglée en dimension 5 dans [9]. Le théorème 1.1 est donc un bond considérable.

Les premières avancées décisives du côté rigide datent du début des années 80 avec [2], qui montre que les classes de déformation de structures de contact en dimension 3 ne coïncident pas avec les classes de déformation de structures presque de contact, et [12] qui montre que les systèmes dynamiques liés à la géométrie symplectique ont des spécificités allant au-delà de celles découlant de la préservation du volume. À partir du milieu des années 80 et la révolution des courbes holomorphes de Gromov [31] et de l'homologie de Floer [23], le côté rigide est devenu dominant, comme en témoignent par exemple les exposés [3, 4, 41, 34, 33] dans ce séminaire. En particulier les courbes holomorphes permettent de démontrer que chaque sphère de dimension impaire supérieure à 5 porte plusieurs structures de contact apparaissant au bord de variétés complexes qui sont homotopes parmi les structures presque de contact mais pas parmi les structures de contact [17, 25, 43].

Mais le côté flexible progressait tout de même avec la théorie des structures de contact vrillées dans [15] et la caractérisation topologique des variétés de Stein