Séminaire BOURBAKI Juin 2017
69$^{\text{e}}$ année, 2016–2017, n$^{\text{o}}$ 1133, p. 455 à 478
doi:10.24033/ast.1071

DENSITÉ MAXIMALE DES EMPILEMENTS DE SPHÈRES EN DIMENSIONS 8 ET 24 [d'après Maryna S. Viazovska *et al.*]

par **Joseph OESTERLÉ**

En mémoire de mon collègue et ami Alexey Zykin

Un *empilement de sphères* d'un espace euclidien E est un ensemble de boules fermées de E, toutes de même rayon, d'intérieurs mutuellement disjoints. Notons Ω leur réunion. On appelle *densité de l'empilement* la limite supérieure, lorsque R tend vers $+\infty$, de $\mathrm{vol}(\Omega \cap \mathrm{B}(0,\mathrm{R}))/\mathrm{vol}(\mathrm{B}(0,\mathrm{R}))$. Elle est invariante par similitudes affines.

L'empilement est dit *périodique* s'il est invariant par translation par les éléments d'un réseau L de E. Sa densité est alors $b\mathrm{N}/\mathrm{V}$, où N est le nombre de boules de l'empilement modulo L, b leur volume commun et V le volume de E modulo L. Il existe des empilements de sphères de E de densité maximale. Leur densité est la borne supérieure des densités d'empilements de sphères périodiques.

Considérons en effet un empilement de sphères de densité maximale δ et soit ε un nombre réel > 0. Notons Ω la réunion des boules de cet empilement. Il existe des hypercubes C de côté arbitrairement grand tels que $\mathrm{vol}(\Omega \cap \mathrm{C}) > (\delta - \varepsilon)\mathrm{vol}(\mathrm{C})$. Si C est assez grand, le volume de la réunion des boules de l'empilement incluses dans C est alors supérieur à $(\delta - 2\varepsilon)\mathrm{vol}(\mathrm{C})$. On peut construire un empilement de sphères périodique de densité supérieure à $\delta - 2\varepsilon$ en pavant E par des translatés de C muni de ces boules.

On associe à tout réseau L de E l'empilement de sphères $(\mathrm{B}(u,r))_{u\in \mathrm{L}}$, où $2r$ est la norme minimale des éléments de $\mathrm{L} - \{0\}$. La borne supérieure des densités d'empilements de sphères associés à des réseaux de E est atteinte, mais il existe des dimensions, 10 par exemple, pour lesquelles on s'attend à ce qu'elle soit strictement inférieure à la densité maximale de tous les empilements de sphères de E.

Déterminer la densité maximale des empilements de sphères d'un espace euclidien de dimension d donnée est un problème redoutablement difficile. Lorsque $d = 1$, cette densité maximale est bien évidemment 1. Lorsque $d = 2$, elle est égale à $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$: c'est la densité de l'empilement de sphères associé à un réseau hexagonal. Une première démonstration de ce résultat a été publiée par A. Thue en 1910 ([**8**]), et L. Fejes Tóth en a donné une autre plus simple en 1943 ([**3**]).

En 1610, J. Kepler avait affirmé que la densité maximale des empilements de sphères en dimension 3 est celle de l'empilement associé au réseau dit *cubique à faces entrées*, qui est $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$. Cette assertion ne fut démontrée qu'en 1998, par T. Hales en collaboration avec son étudiant S. Ferguson. La longueur et la complexité de la preuve étaient telles qu'il était difficile d'en contrôler tous les détails. Elle ne fut intégralement publiée qu'en 2006 ([**4**] et [**7**]). Fort heureusement, on dispose maintenant d'une preuve formelle de ce théorème (tout comme d'ailleurs du théorème de Feit et Thompson et du théorème des quatre couleurs), dans laquelle chaque étape est validée par un ordinateur à partir des seuls axiomes de la théorie des ensembles ([**6**], [**5**]).

Antérieurement aux travaux de Maryna Viazovska présentés dans cet exposé, la densité maximale des empilements de sphères n'avait été déterminée en aucune dimension $\geqslant 4$. La densité maximale des empilements de sphères associés à des réseaux était par contre déjà connue en dimension $\leqslant 8$ et en dimension 24.

En 2003, H. Cohn et N. Elkies développèrent une nouvelle technique d'optimisation linéaire pour majorer la densité des empilements de sphères ([**1**]). Ainsi, ils démontrèrent que si $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ est une fonction non nulle convenable (par exemple dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathrm{E})$), négative pour $\|x\| \geqslant 2$ et à transformée de Fourier $\hat{f}$ positive, tout empilement de sphères de E est de densité au plus $bf(0)/\hat{f}(0)$, où b est le volume de la boule unité de E (voir détails au § 1).

Ils obtinrent ainsi des majorations de la densité des empilements de sphères meilleures que celles précédemment connues dans de nombreuses dimensions, en particulier toutes celles comprises entre 4 et 36. Les dimensions 8 et 24 étaient à cet égard remarquables, puisque les majorations obtenues dans ces cas n'excédaient que de très peu (moins de 0,0001% en dimension 8 et de 0,071% en dimension 24) les densités des empilements associés aux réseaux de type E_8 et de Leech respectivement (voir § 2 pour la définition de ces réseaux).

H. Cohn et N. Elkies conjecturèrent alors l'existence de fonctions f permettant de démontrer que ces empilements sont de densité maximale en ces deux dimensions, et aussi que ce sont les seuls parmi les empilements périodiques, à similitude affine près. Ils précisèrent les propriétés attendues de f. En mars 2016, Maryna S. Viazovska parvint à construire une telle fonction dans le cas de la dimension 8 à l'aide de transformées de Laplace de fonctions issues des mondes modulaire et quasi-modulaire ([**9**]). Très peu de temps après, en collaboration avec d'autres mathématiciens (H. Cohn, A. Kumar, S. Miller et D. Radchenko), elle parvint à faire de même en dimension 24 ([**2**]). En résultent les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *La densité maximale des empilements de sphères dans un espace euclidien de dimension* 8 *est* $\frac{\pi^4}{2^4 4!}$ *. C'est celle des empilements associés aux réseaux de* *type* E_8. *Ces empilements sont les seuls, à similitude affine près, qui soient périodiques et de densité maximale.*

THÉORÈME 2. — *La densité maximale des empilements de sphères dans un espace euclidien de dimension* 24 *est* $\frac{\pi^{12}}{12!}$. *C'est celle des empilements associés aux réseaux de Leech. Ces empilements sont les seuls, à similitude affine près, qui soient périodiques et de densité maximale.*

§ 1. LES MAJORATIONS DE H. COHN ET N. ELKIES

1. Réseaux d'un espace euclidien

Soit E un espace euclidien. Notons d sa dimension, $(x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$ son produit scalaire et $x \mapsto \|x\| = \langle x \mid x \rangle^{1/2}$ sa norme. L'application linéaire qui à $y \in \mathrm{E}$ associe le caractère unitaire $x \mapsto e^{2\pi i \langle x | y \rangle}$ définit un isomorphisme du groupe additif de E sur son dual de Pontryagin, par lequel on identifie ces deux groupes. Munissons E de son unique mesure de Haar autoduale, notée dx. Elle s'identifie à la mesure de Lebesgue lorsqu'on identifie E à $\mathbf{R}^d$ par choix d'une base orthonormale.

Soit L un réseau de E, c'est-à-dire un sous-groupe discret de E de rang d sur $\mathbf{Z}$. On appelle *covolume* de L et on note covol(L) le volume de E/L pour le quotient de la mesure de Haar dx par la mesure de comptage. Autrement dit, c'est le volume de tout domaine fondamental mesurable de E modulo L.

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de L sur $\mathbf{Z}$. Le covolume de L est la valeur absolue du déterminant de $(e_1, \ldots, e_d)$ dans une base orthonormale de E. C'est aussi la racine carrée du *discriminant* de L, c'est-à-dire du déterminant de la matrice de Gram $(\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$.

Le réseau de E orthogonal de L pour la dualité de Pontryagin se compose des $v \in \mathrm{E}$ tels que $\langle v \mid u \rangle \in \mathbf{Z}$ pour tout $u \in \mathrm{L}$. Il s'identifie canoniquement au dual du $\mathbf{Z}$-module L. C'est pourquoi on le note L^*. On a la relation $\mathrm{covol}(\mathrm{L})\mathrm{covol}(\mathrm{L}^*) = 1$.

2. Formule d'inversion de Fourier

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable. Sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f} : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ définie par $\hat{f}(y) = \int_{\mathrm{E}} f(x) e^{2\pi i \langle x | y \rangle} dx$. Elle est continue. Si $\hat{f}$ est elle-même intégrable sur E, sa transformée de Fourier est continue et égale presque partout à la fonction $x \mapsto f(-x)$ (formule d'inversion de Fourier).

3. Formule sommatoire de Poisson

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $\alpha > d$ tel que $|f(x)| = \mathrm{O}(\|x\|^{-\alpha})$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Alors f est intégrable et, pour tout réseau L de E, la famille de fonctions $(f(x+u))_{u\in \mathrm{L}}$ est normalement sommable dans toute partie compacte de E. Si de plus on a $|\hat{f}(x)| = \mathrm{O}(\|x\|^{-\alpha})$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, on a la *formule sommatoire de Poisson*

$$\sum_{u\in \mathrm{L}} f(x+u) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})} \sum_{v\in \mathrm{L}^*} e^{-2\pi i\langle x|v\rangle} \hat{f}(v). \tag{1}$$

Pour simplifier, nous appellerons *admissibles* les fonctions $f : \mathrm{E} \to \mathbf{C}$ ayant ces propriétés.

4. Majorations de Cohn et Elkies

THÉORÈME 3. — *Soient* E *un espace euclidien de dimension d, $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ une fonction admissible réelle paire et r un nombre réel > 0. Supposons que :*

a) *on a $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ tel que $\|x\| \geqslant 2r$;*

b) *on a $\hat{f}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et $\hat{f}(0) > 0$.*

Tout empilement de sphères de E *est alors de densité au plus $br^d \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$, où $b = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité de* E.

Il suffit de démontrer cela lorsque l'empilement considéré est périodique, i.e. invariant par translations par un réseau L de E, et que ses boules sont de rayon r. Soit alors A un système de représentants des centres des boules modulo L. La densité de l'empilement considéré est $br^d\,\mathrm{Card}(\mathrm{A})/\mathrm{covol}(\mathrm{L})$. Comme f est admissible, on a pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$\sum_{u\in \mathrm{L}} f(x+u) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})} \sum_{v\in \mathrm{L}^*} e^{-2\pi i\langle x|v\rangle} \hat{f}(v). \tag{2}$$

On en déduit que

$$\sum_{(a,a')\in \mathrm{A}^2} \sum_{u\in \mathrm{L}} f(a'-a+u) = \frac{1}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})} \sum_{v\in \mathrm{L}^*} |\sum_{a\in \mathrm{A}} e^{2\pi i\langle a|v\rangle}|^2 \hat{f}(v). \tag{3}$$

L'hypothèse a) implique que tous les termes $f(a'-a+u)$ intervenant dans le membre de gauche sont négatifs, sauf ceux pour lesquels $a = a'$ et $u = 0$. Le membre de gauche est donc majoré par $\mathrm{Card}(\mathrm{A})f(0)$. L'hypothèse b) implique que le membre de droite est minoré par le terme correspondant à $v = 0$, c'est-à-dire par $\frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A})^2}{\mathrm{covol}(\mathrm{L})}\hat{f}(0)$. On a donc $\mathrm{Card}(\mathrm{A})/\mathrm{covol}(\mathrm{L}) \leqslant \frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$, d'où le théorème.

REMARQUES. — 1) Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbf{R}$ une fonction admissible qui possède les propriétés a) et b) du théorème 3. La fonction g, qui à $x \in \mathrm{E}$ associe la valeur moyenne de f sur la sphère $\mathrm{S}(0, \|x\|)$, est alors aussi admissible et possède ces mêmes propriétés. De plus on a

$g(0) = f(0)$ et $\hat{g}(0) = \hat{f}(0)$. On peut donc dans le théorème 3 se restreindre à ne considérer que des fonctions f *radiales*, i.e. pour lesquelles $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

2) Nous avons énoncé le théorème 3 en y incluant un rayon r pour la commodité des applications. En fait, on peut se ramener au cas où $r = 1$ en remplaçant f par la fonction $x \mapsto f(rx)$, dont la transformée de Fourier est $x \mapsto r^{-d}\hat{f}(x/r)$.

L'examen des cas d'égalité dans la démonstration précédente fournit l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1. — *Soit f une fonction possédant les propriétés énoncées dans le théorème 3,* L *un réseau de* E, *et* $\big(\mathrm{B}(s,r)\big)_{s\in\mathrm{S}}$ *un empilement de sphères de rayon r invariant par translations par* L. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *L'empilement de sphères considéré a pour densité* $br^d\frac{f(0)}{\hat{f}(0)}$.

b) *On a* $\mathrm{Card}(\mathrm{S}/\mathrm{L})/\mathrm{covol}(\mathrm{L}) = f(0)/\hat{f}(0)$.

c) *On a* $f(s-t) = 0$ *pour tous* s, t *dans* S *tels que* $s \neq t$, *et* $\hat{f}(v) = 0$ *pour tout* $v \in \mathrm{L}^* - \{0\}$ *tel que* $\sum_{a\in\mathrm{S}/\mathrm{L}} e^{2\pi i\langle a,v\rangle} \neq 0$.

Lorsqu'elles sont satisfaites, l'empilement de sphères considéré est de densité maximale.

REMARQUE 3. — Lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{L}$ dans la prop. 1, ce qui sous-entend que $\|u\| \geqslant 2r$ pour $u \in \mathrm{L} - \{0\}$, les conditions b) et c) se simplifient en :

b′) On a $\hat{f}(0) = \mathrm{covol}(\mathrm{L})f(0)$.

c′) On a $f(u) = 0$ pour tout $u \in \mathrm{L} - \{0\}$ et $\hat{f}(v) = 0$ pour tout $v \in \mathrm{L}^* - \{0\}$.

Elles impliquent que l'empilement de sphères considéré est de densité maximale, et en particulier que la norme minimale des vecteurs non nuls de L est $2r$.

§ 2. RÉSEAUX DE TYPE E_8 ET RÉSEAUX DE LEECH

1. Définitions

Soit E un espace euclidien de dimension d. Un réseau L de E est dit *entier* si les produits scalaires de ses éléments sont des entiers relatifs. Il est dit *pair* si $\langle u, u\rangle$ est un entier pair pour tout $u \in \mathrm{L}$. Un réseau pair est entier.

Un réseau de E est dit *unimodulaire* si son discriminant est 1, ou ce qui revient au même si son covolume dans E est 1. Pour qu'un réseau L de E soit entier et unimodulaire, il faut et il suffit que l'on ait $\mathrm{L}^* = \mathrm{L}$.

EXEMPLE. — Soit k un entier naturel. Dans $\mathbf{R}^{8k}$, muni de son produit scalaire usuel, le réseau formé des vecteurs dont les coordonnées appartiennent soit toutes à $\mathbf{Z}$, soit toutes à $\frac{1}{2} + \mathbf{Z}$, et ont pour somme un entier pair, est un réseau unimodulaire pair noté Γ_{8k}.