Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70e année, 2017–2018, no 1137, p. 49 à 94
doi:10.24033/ast.1081

SPLENDEUR DES VARIÉTÉS DE DELIGNE-LUSZTIG
[d'après Deligne-Lusztig, Broué, Rickard, Bonnafé-Dat-Rouquier]

par **Olivier DUDAS**

INTRODUCTION

Étant donné un espace vectoriel V sur un corps parfait, la *décomposition de Jordan* permet de ramener l'étude d'un automorphisme $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ à l'étude de sa partie semi-simple et d'une famille d'endomorphismes unipotents agissant sur les espaces caractéristiques de ϕ, donc généralement plus petits que l'espace vectoriel ambiant V. Cette décomposition s'étend naturellement aux groupes orthogonaux $\mathrm{SO}(V)$ et symplectiques $\mathrm{Sp}(V)$, et plus généralement à des groupes algébriques linéaires. C'est un théorème de réduction particulièrement utile dans l'étude de la structure des groupes classiques et de leurs classes de conjugaison.

Le but de cet exposé est d'étudier une forme similaire de cette décomposition pour les représentations linéaires de groupes finis comme $\mathrm{GL}(V)$, $\mathrm{SO}(V)$ et $\mathrm{Sp}(V)$ lorsque le corps de base est fini. La décomposition des représentations est mixte ; elle fait intervenir à la fois :

- des éléments semi-simples du groupe fini considéré (ou plutôt d'un groupe dual) ;
- des représentations linéaires dites *unipotentes* de groupes finis plus petits, obtenus à partir des centralisateurs de ces éléments semi-simples.

Dans un premier temps, nous expliquerons comment les travaux de Deligne-Lusztig [**15**], Lusztig [**20**] et Broué-Michel [**11**] permettent de décomposer les représentations d'un groupe réductif fini G selon certains éléments semi-simples d'un groupe dual G^*

$$\mathsf{Rep}(G) = \bigoplus_{s \in G^*} \mathsf{Rep}_s(G).$$

Nous montrerons ensuite comment, sous certaines conditions sur l'élément s, chaque sous-catégorie de représentations $\mathsf{Rep}_s(G)$ est « équivalente » à celle des représentations unipotentes du groupe $C_{G^*}(s)$

$$\mathsf{Rep}_s(G) \approx \mathsf{UniRep}(C_{G^*}(s)).$$

Plusieurs types d'équivalences seront étudiées selon le contexte. Pour les représentations à coefficients dans un corps algébriquement clos de caractéristique zéro (comme $\mathbb{C}$ ou une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_\ell$) on obtient une bijection entre caractères irréductibles faisant office de paramétrage des représentations irréductibles. En caractéristique positive, on s'intéressera à des équivalences entre les catégories abéliennes de représentations et leurs catégories homotopiques, préservant à la fois le nombre de représentations irréductibles, mais aussi leurs propriétés homologiques (groupes d'extensions). Ces équivalences, conjecturées par Broué [**7**] en 1988, s'obtiennent à partir de l'étude précise de la cohomologie de certaines variétés introduites par Deligne-Lusztig [**15**] en 1976. Les travaux de Bonnafé-Rouquier [**4**] en 2003, puis de Bonnafé-Dat-Rouquier [**3**] en 2017, donnent la forme la plus précise de ces équivalences, dites *splendides*, et nous invitent ainsi à admirer la splendeur des variétés de Deligne-Lusztig.

Résumé

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous donnons quelques notations et résultats qui serviront de fil directeur de ces notes.

1. Groupes réductifs finis. — La classe des groupes finis qui nous intéressera est celle des groupes réductifs finis. Comme leur nom l'indique, ce sont des groupes algébriques réductifs connexes définis sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Parmi ces groupes, on trouve les groupes classiques tels que $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SO}_n(q)$ et $\mathrm{Sp}_{2n}(q)$, des versions « tordues » comme le groupe unitaire $\mathrm{GU}_n(q)$ et spécial unitaire $\mathrm{SU}_n(q)$ mais aussi le groupe de Steinberg ${}^3D_4(q)$, ainsi que des groupes exceptionnels de type E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2. Ces groupes jouent un rôle prédominant dans la théorie des groupes finis puisque la grande majorité des groupes quasi-simples sont des groupes réductifs finis. La nature géométrique de ces groupes permet d'utiliser les outils usuels de géométrie algébrique pour étudier leur structure, mais aussi pour construire leurs représentations.

2. Représentations. — Étant donné un groupe réductif fini G sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, on étudiera les représentations linéaires de G en *caractéristique transverse*. Ce sont des k-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire de G, avec la condition supplémentaire que la caractéristique $\ell \geq 0$ de k ne divise pas q (donc différente de la caractéristique de $\mathbb{F}_q$). On travaillera toujours sous l'hypothèse que k est assez grand de sorte que l'algèbre kG soit déployée, afin d'éluder tout problème de rationalité des représentations. Les représentations de G à coefficients dans k sont de manière équivalente des représentations de l'algèbre de groupe kG, et la catégorie abélienne qu'elles forment sera notée $kG\text{-}\mathsf{mod}$.

Lorsque k est un corps de caractéristique zéro, la catégorie $kG\text{-}\mathsf{mod}$ est semi-simple : toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles, et sa classe d'isomorphisme est déterminée par un invariant numérique, son caractère. En revanche, lorsque la caractéristique de k divise l'ordre de G ces invariants numériques ne suffisent plus. D'une part, d'autres classes de représentations entrent en jeu, comme les représentations projectives, et d'autre part des invariants homologiques sont nécessaires pour caractériser $kG\text{-}\mathsf{mod}$ (comme les extensions entre représentations). Enfin, puisque l'algèbre kG n'est pas quelconque mais associée à un groupe fini G, d'autres invariants provenant des ℓ-sous-groupes de G sont à prendre en compte. L'étude des représentations de G et plus généralement de ses *blocs* se fera par l'intermédiaire de la catégorie abélienne $kG\text{-}\mathsf{mod}$ et de ses facteurs indécomposables, ainsi que des *groupes de défaut* associés à ces facteurs. Cette terminologie sera rappelée au §3.1.

3. Des équivalences de catégories. — La décomposition de Jordan de la catégorie $kG\text{-}\mathsf{mod}$ s'obtient en deux étapes. La première consiste en une décomposition

$$kG\text{-}\mathsf{mod} \simeq \bigoplus_{(s)\in G^*_{\mathrm{ss},\ell'}/\sim} kGe_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}$$

où (s) varie parmi les classes de conjugaison d'éléments semi-simples et ℓ-réguliers de G^*. Ici, G^* correspond à un dual de Langlands [(1)] de G ; par exemple $G^* \simeq \mathrm{PGL}_n(q)$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(q)$. L'élément $e_{(s)}$ associé est un idempotent central de kG, permettant de couper l'algèbre kG et la catégorie $kG\text{-}\mathsf{mod}$ en une somme directe. Lorsque $s = 1$, la catégorie $kGe_{(1)}\text{-}\mathsf{mod}$ est appelée la catégorie des représentations *unipotentes* du groupe réductif fini G.

La seconde partie de la décomposition de Jordan s'avère la plus difficile : elle consiste à montrer que chaque sous-catégorie $kGe_{(s)}\text{-}\mathsf{mod}$ est une catégorie de représentations unipotentes pour le groupe $C_{G^*}(s)$. Nous énonçons ici un cas particulier, conséquence des travaux de Broué [**7**], Bonnafé-Rouquier [**4**] et Bonnafé-Dat-Rouquier [**3**].

Théorème. — *Supposons que $C_{G^*}(s) = L^*$ est un sous-groupe de Levi de G^*, dual d'un sous-groupe de Levi L de G. Alors il existe une équivalence de catégories*

(1) La présence d'un groupe dual peut paraître étrange à première vue. La construction et le paramétrage des représentations de G se fait à partir d'un procédé d'induction des caractères de tores maximaux (voir §1.2). Ces caractères correspondent naturellement à des cocaractères du tore dual dont les valeurs produisent des éléments semi-simples de G^*.

abéliennes

$$kGe_{(s)}\text{-mod} \simeq kLe_{(1)}\text{-mod}.$$

Cette équivalence induit une bijection entre les blocs qui préserve les groupes de défaut.

4. Variétés de Deligne-Lusztig et leur cohomologie. — La nature géométrique des groupes réductifs finis a permis à Deligne et Lusztig d'en construire des représentations (en caractéristique zéro) dans la cohomologie de certaines variétés algébriques [**15**]. Ces méthodes s'adaptent parfaitement au cadre modulaire (en caractéristique positive) en remplaçant les groupes de cohomologie ℓ-adique par des complexes de cohomologie définis à quasi-isomorphisme ou à équivalence d'homotopie près.

Lorsque le groupe $C_{G^*}(s) = L^*$ est un sous-groupe de Levi de G^*, dual d'un sous-groupe de Levi L de G, on peut lui associer une *variété de Deligne-Lusztig* dont le complexe de cohomologie induit un foncteur

$$\mathsf{D}^b(kGe_{(s)}\text{-mod}) \longrightarrow \mathsf{D}^b(kLe_{(1)}\text{-mod}).$$

Ce n'est pas encore l'équivalence espérée puisqu'a priori ce foncteur envoie des représentations sur des complexes de représentations. Dans l'article [**7**] où il énonce sa conjecture, Broué donne un critère géométrique précis sur les variétés de Deligne-Lusztig pour que le foncteur précédent provienne en fait d'un foncteur exact

$$kGe_{(s)}\text{-mod} \longrightarrow kLe_{(1)}\text{-mod}.$$

Les résultats de Lusztig lorsque $k = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ suffisent alors pour montrer que ce foncteur est une équivalence.

La contribution majeure de Bonnafé-Rouquier [**4**] à ce problème consiste à vérifier le critère géométrique de Broué, par une analyse fine de la géométrie des variétés de Deligne-Lusztig, de leur compactification et de certains revêtements abéliens. Nous expliquerons au §2 comment leur travail trouve son inspiration dans l'article originel de Deligne-Lusztig paru presque 30 ans plus tôt.

Néanmoins, une équivalence abstraite entre (des facteurs indécomposables d') algèbres de groupes n'est pas satisfaisante du point de vue des représentations des groupes finis. Il manque des informations « locales », notamment sur les groupes de défaut des blocs, permettant d'expliquer les coïncidences numériques entre les valeurs des caractères de G dans la série (s) et des caractères unipotents de $C_{G^*}(s)$. Ces coïncidences pourraient être le reflet d'une équivalence *splendide* entre les catégories homotopiques de modules de ℓ-permutation associées aux algèbres $kGe_{(s)}$ et $kC_{G^*}(s)e_{(1)}$. Une fois de plus, c'est le complexe de cohomologie qui fournit cette équivalence dans le cas où $C_{G^*}(s)$ est un sous-groupe de Levi : en poursuivant les travaux de Rickard [**23**], Bonnafé-Dat-Rouquier montrent dans [**3**] que l'on dispose en fait d'une famille d'équivalences

$$kC_G(Q)e_{(s)}\text{-}\mathsf{mod} \xrightarrow{\sim} kC_L(Q)e_{(1)}\text{-}\mathsf{mod}$$

associées aux ℓ-sous-groupes Q de L et à leurs centralisateurs dans L et G. Les ingrédients de la preuve de ce résultat seront donnés au §3. Nous discuterons aussi d'une généralisation au §4.

Applications

La décomposition de Jordan splendide est un formidable théorème de réduction pour étudier les représentations modulaires des groupes finis. Elle permet de ramener l'étude des blocs d'un groupe réductif fini à l'étude des blocs dits *isolés* qui sont des blocs très proches d'être unipotents. Parmi les problèmes majeurs qu'elle a aidé à résoudre, notons :

- la conjecture du défaut abélien de Broué [**6**, Conj. 3.3] qui prédit que deux blocs de groupes finis sont dérivé-équivalents dès que leurs groupes de défaut sont abéliens et isomorphes. Cette conjecture est démontrée pour les groupes linéaires par Chuang-Rouquier [**13**] ;
- un sens de la conjecture de hauteur zéro de Brauer, qui prédit que tous les caractères d'un bloc de défaut abélien sont de hauteur zéro, démontrée par Kessar-Malle [**18**].

De nombreuses autres conjectures sur les groupes finis, appelées conjectures de comptage ou conjectures local-global (2), reposent sur des réductions aux groupes finis simples. Les experts s'accordent pour dire que le cas des groupes réductifs finis serait sans espoir sans la décomposition de Jordan splendide.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Cédric Bonnafé, Jean-François Dat, Léo Dreyfus-Schmidt, Gunter Malle et Raphaël Rouquier pour leurs nombreuses et précieuses remarques sur une version préliminaire de ce texte. Ce travail a bénéficié du soutien de la bourse ANR-16-CE40-0010-01 de l'Agence Nationale de la Recherche.

(2) Comme les conjectures d'Alperin, d'Alperin-Mckay ou de Dade (voir [**21**]).