Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70^{e} année, 2017–2018, n° 1138, p. 95 à 124
doi:10.24033/ast.1082

GROUPES CONVEXES-COCOMPACTS EN RANG SUPÉRIEUR [d'après Labourie, Kapovich, Leeb, Porti,...]

par **Olivier GUICHARD**

INTRODUCTION

Les sous-groupes discrets des groupes de Lie, ou plutôt leurs actions sur les espaces symétriques et plus généralement même les actions sur les immeubles euclidiens, sont au cœur de cet exposé. Y seront présentés les sous-groupes convexes-cocompacts d'isométries de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et comment généraliser cette classe en rang supérieur. Spécifiquement, voici l'un des résultats qui sera souligné et mis en contexte.

Théorème 0.1 (Kapovich, Leeb et Porti [**37**]). — *Soit $\Gamma = \langle S \rangle$ un sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ engendré par un ensemble fini S. On suppose*

Régularité quasi-isométrique. — *Il existe $c > 0$ et $C \geq 0$ tels que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\mu_1(\gamma) - \mu_2(\gamma) \geq c\,|\gamma|_S - C$.*

On a alors les conclusions suivantes

Hyperbolicité. — *Le groupe Γ est hyperbolique au sens de Gromov. Son bord de Gromov est noté $\partial_\infty \Gamma$.*

Applications au bord. — *Il existe des applications continues et Γ-équivariantes $\beta_1 \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ et $\beta_{n-1} \colon \partial_\infty\Gamma \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R}) = \mathrm{Gr}_{n-1}(\mathbf{R}^n)$ telles que*

$$\begin{aligned} &\forall t \in \partial_\infty\Gamma, && \beta_1(t) \subset \beta_{n-1}(t) \\ &\forall t \neq t' \in \partial_\infty\Gamma, && \beta_1(t) \cap \beta_{n-1}(t') = 0. \end{aligned}$$

Contraction exponentielle. — *Il existe $k > 0$ et $K \geq 0$ tels que, pour tout rayon géodésique $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ dans le graphe de Cayley de Γ avec $\gamma_0 = e_\Gamma$ dont le point limite dans $\partial_\infty\Gamma$ est noté γ_∞, on a, pour tout $p \in \mathbf{N}$,*

$$\log\bigl\| \gamma_p^{-1}|_{T_{\beta_1(\gamma_\infty)}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})} \bigr\| \geq k\,p - K = k\,|\gamma_p|_S - K.$$

Réciproquement, un sous-groupe Γ *vérifiant ces conclusions satisfait à l'hypothèse de régularité quasi-isométrique.*

Précisons d'abord quelques notations utilisées dans cet énoncé.

Lorsqu'un groupe Γ a une partie génératrice S donnée, la *fonction longueur* associée est notée $|\cdot|_S\colon \Gamma \to \mathbf{N}$, explicitement, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\gamma|_S = \inf\{p \in \mathbf{N} \mid \exists \gamma_1, \ldots, \gamma_p \in S \cup S^{-1}, \gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_p\}$ (le produit vide étant égal à e_Γ). Une suite $(\gamma_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de Γ est dès lors une géodésique dans le graphe de Cayley si, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\gamma_p^{-1}\gamma_{p+1} \in S \cup S^{-1}$ et $|\gamma_0^{-1}\gamma_p|_S = p$.

Le bord de Gromov de Γ est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques pour la relation « être à distance de Hausdorff bornée ».

Si S_1 est une seconde partie génératrice *finie* de Γ, il existe $c_1 > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $|\gamma|_{S_1} \geq c_1\, |\gamma|_S$. Ainsi, le choix de la partie génératrice finie S dans l'énoncé ci-dessus importe donc peu et la notation $|\cdot|_\Gamma$ sera dorénavant adoptée pour désigner l'une des fonctions longueurs associées à une partie génératrice finie.

Si g est un élément de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, $\mu_1(g), \ldots, \mu_n(g)$ désignent les logarithmes des valeurs principales de g, c'est-à-dire $e^{2\mu_1(g)}, \ldots, e^{2\mu_n(g)}$ est la liste décroissante des valeurs propres de $g\,{}^t\!g$. Dans la conclusion de l'énoncé, $g|_{T_x\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})}$ désigne l'application tangente au point x du difféomorphisme de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ induit par l'élément g de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, c'est une application linéaire de $T_x\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ dans $T_{g\cdot x}\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$. Sa norme $\|g|_{T_x\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})}\|$ est la norme d'opérateur calculée pour une métrique riemannienne sur $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$. La compacité de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$ implique que le choix de cette structure riemannienne n'influe que sur les constantes k et K de la conclusion du théorème.

Le théorème énoncé ici est un *cas particulier* (emblématique, bien sûr) des résultats de Kapovich, Leeb et Porti. En effet ceux-ci autorisent :

- plus de généralités sur la *source*. Il n'est pas nécessaire de travailler avec un sous-groupe de type fini Γ mais une application $\varphi\colon Z \to \mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ d'un espace métrique (Z, d_Z) géodésique localement compact dans $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, l'hypothèse s'écrivant ici : $\forall z_1, z_2 \in Z$, $\mu_1\big(\varphi(z_1)^{-1}\varphi(z_2)\big) - \mu_2\big(\varphi(z_1)^{-1}\varphi(z_2)\big) \geq c\, d_Z(z_1, z_2) - C$. La conclusion affirme que Z est hyperbolique au sens de Gromov et qu'il existe des applications continues $\beta_1\colon \partial_\infty Z \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R})$, $\beta_{n-1}\colon \partial_\infty Z \to \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ satisfaisant des propriétés de transversalité et de contraction similaires à celles énoncées plus haut.
- plus de généralités sur le *but*. Le même résultat est valable en remplaçant $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$ ou par une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. En fait, on peut aussi considérer des sous-groupes discrets d'un groupe algébrique $\mathbf{G}$ semi-simple sur un corps topologique localement compact et même sur un corps non-archimédien à

valuation non discrète. L'hypothèse est alors que les projections de Cartan (qui sont des éléments de la chambre de Weyl fermée) des éléments de Γ sont quantitativement « loin » d'une réunion de murs de la chambre de Weyl [(1)]. La conclusion est encore l'hyperbolicité au sens de Gromov de Γ et l'existence d'une application, du bord de Gromov $\partial_\infty\Gamma$ dans la variété drapeau associée à cette réunion finie de murs, satisfaisant ces propriétés de transversalité et de contraction.

Pour le cas de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, la chambre de Weyl fermée A^+ est l'ensemble des matrices diagonales à coefficients décroissants, la projection d'un élément g de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$ est la matrice dont la diagonale est $(\mu_1(g), \mu_2(g), \dots, \mu_n(g))$. Les murs correspondant à l'énoncé du théorème sont $\{(m_1, m_2, \dots, m_n) \in A^+ \mid m_1 = m_2\}$ et $\{(m_1, \dots, m_n) \in A^+ \mid m_{n-1} = m_n\}$, l'éloignement de ce second mur provient de l'hypothèse du théorème appliquée à γ^{-1}. La variété drapeau associée à ces deux murs est $\mathscr{F}_{1,n-1} = \{(\ell, h) \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{R}) \times \mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R}) \mid \ell \subset h\}$, les applications β_1 et β_{n-1} se combinant en une application continue, équivariante et transverse $\beta\colon \partial_\infty\Gamma \to \mathscr{F}_{1,n-1}$. Notons que, même pour $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, le théorème principal est aussi présenté dans une généralité restreinte puisque tous les autres choix de murs sont possibles conduisant à des applications au bord dans des variétés drapeaux différentes.

La condition sur les projections de Cartan peut également s'exprimer en termes de l'action sur l'espace symétrique, ou bien sur l'immeuble de Bruhat et Tits dans le cas où le groupe algébrique est défini sur un corps ultramétrique, associé à $\mathbf{G}$. La position relative de deux points x et y de cet espace symétrique ou immeuble euclidien est encore un élément de la chambre de Weyl du groupe $\mathbf{G}$ et la projection de Cartan d'un élément $g \in \mathbf{G}$ est égale à la position relative de x_0 et $g \cdot x_0$ (où x_0 est un point base de l'espace symétrique ou immeuble euclidien en question). Ce point de vue permet donc de traiter d'une même manière ces deux cas mais également d'inclure le cas de sous-groupes du groupe des isométries d'un immeuble euclidien non nécessairement localement compact. La démonstration du théorème fait apparaître ce type d'immeubles comme cônes asymptotiques et il est naturel de les inclure dans la discussion.

Pour limiter le nombre de notions à introduire, cet exposé n'adoptera que peu ou prou ce langage géométrique au prix de présenter des résultats peut-être partiels. Ce point de vue est largement développé dans les articles de Kapovich, Leeb et Porti [**33, 35, 36, 39, 37**] ainsi que dans les notes de cours et panorama qu'ils ont écrits [**32, 34, 38**]. Notons cependant que même pour $n = 3$ et pour $\Gamma \simeq$

(1) Les énoncés des articles de Kapovich, Leeb et Porti adoptent un point de vue « dual » en demandant que les projections de Cartan soient quantitativement « proches » de la face de la chambre de Weyl égale à l'intersection des murs restants.

$\mathbb{F}_2$ le groupe libre à deux générateurs (auquel cas l'hyperbolicité de Γ n'est plus à établir) le résultat est nouveau.

Le but de ce texte est de donner des éléments de la démonstration du théorème 0.1, de donner plusieurs autres caractérisations de la classe des sous-groupes (nécessairement discrets) qui apparaissent ici, de faire le lien avec la classe des sous-groupes convexes-cocompacts, d'énumérer certaines propriétés géométriques et dynamiques remarquables de cette classe de sous-groupes.

Aussi bien les hypothèses que les conclusions de ce théorème impliquent uniquement la projection de Γ dans $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$. Comme il est parfois commode de se débarrasser du centre de $\mathbf{GL}_n(\mathbf{R})$, la suite de cet exposé privilégiera de temps en temps les sous-groupes de $\mathbf{PGL}_n(\mathbf{R})$, voire de $\mathbf{SL}_n(\mathbf{R})$. Nous ne l'avons pas écrit mais l'action de Γ sur $\mathbb{P}^{n-1*}(\mathbf{R})$ vérifie des propriétés de contraction équivalentes.

Il peut être aussi utile d'observer que les propriétés énoncées dans ce théorème sont « stables par passage à un sous-groupe d'indice fini » ; précisément

- si l'hypothèse de régularité quasi-isométrique est satisfaite pour un sous-groupe d'indice fini de Γ, alors elle l'est pour Γ (quitte à changer les constantes c et C) ;
- de même, si les conclusions sont satisfaites pour un sous-groupe d'indice fini de Γ, alors elles le sont pour Γ (quitte à changer les constantes k et K).

1. GROUPES CONVEXES-COCOMPACTS D'ISOMÉTRIES DE L'ESPACE HYPERBOLIQUE

Toujours pour rester concret, la discussion suivante est restreinte aux sous-groupes d'isométries de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, mais son contexte naturel serait plutôt celui des groupes d'isométries de variétés de Cartan et Hadamard de courbure sectionnelle majorée par une constante strictement négative.

1.1. L'espace hyperbolique et ses convexes

Le sous-groupe des matrices orthogonales pour $Q_{n,1} = \left(\begin{smallmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ est noté $\mathbf{O}(n,1) = \{g \in \mathbf{GL}_{n+1}(\mathbf{R}) \mid {}^t g Q_{n,1} g = Q_{n,1}\}$. La forme quadratique associée à $Q_{n,1}$ est $q_{n,1} \colon \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R} / x \mapsto {}^t x Q_{n,1} x$. Le modèle projectif de l'espace hyperbolique est

$$\mathbb{H}^n = \{\ell \in \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \mid q_{n,1}|_{\ell \smallsetminus \{0\}} < 0\} \ ;$$

il s'identifie à l'hyperboloïde $\{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid q_{n,1}(x) = -1,\ x_{n+1} > 0\}$. Son adhérence dans $\mathbb{P}^n(\mathbf{R})$ est $\overline{\mathbb{H}}^n = \{\ell \in \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \mid q_{n,1}|_\ell \leq 0\}$ et est la réunion de $\mathbb{H}^n$ et de $\partial_\infty \mathbb{H}^n = \{\ell \in \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \mid q_{n,1}|_\ell = 0\}$. Aussi bien $\mathbb{H}^n$ que son adhérence sont contenus dans la carte affine $\mathbb{A}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{R}) \smallsetminus \mathbb{P}(\{x_{n+1} = 0\})$. Dans les coordonnées naturelles sur cette carte affine, $\mathbb{H}^n$ et $\overline{\mathbb{H}}^n$ sont respectivement la boule unité ouverte et la boule unité fermée.

L'action de $\mathbf{O}(n,1)$ sur $\mathbb{H}^n$ est transitive et le stabilisateur du point $\ell_0 = \mathbf{R}e_{n+1}$ ($(e_i)_{i=1,\dots,n+1}$ désigne la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$) est $\mathbf{O}(n) \times \mathbf{O}(1)$. Puisque ce stabilisateur est compact, il existe une métrique riemannienne $\mathbf{O}(n,1)$-invariante sur $\mathbb{H}^n$. La distance associée $d_{\mathbb{H}^n}$ s'exprime aisément en termes de la géométrie projective : si ℓ et $\ell' \in \mathbb{H}^n$, alors $d_{\mathbb{H}^n}(\ell,\ell') = 1/2\left|\log|[\ell,\ell';b,b']|\right|$ où b, b' sont deux éléments distincts de $\partial_\infty\mathbb{H}^n$ tels que ℓ,ℓ',b,b' appartiennent à une même droite projective (si $\ell \neq \ell'$, alors $\{b,b'\}$ est l'intersection de $\partial_\infty\mathbb{H}^n$ et de la droite projective engendrée par ℓ et ℓ') et où $[\ell,\ell';b,b'] = \frac{\ell-b}{\ell-b'}\frac{\ell'-b'}{\ell'-b}$ est le birapport des quatre points ℓ,ℓ',b,b' calculé dans une identification quelconque de la droite projective contenant ces points avec $\mathbb{P}^1(\mathbf{R})$.

Le groupe des isométries de $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ est alors $\mathbf{PO}(n,1) = \mathbf{O}(n,1)/\{\pm 1_{n+1}\}$.

Deux points de $\mathbb{H}^n$ sont reliés par un unique segment géodésique qui est égal au segment affine les reliant dans $\mathbb{A}^n$. Plus généralement, un point de $\mathbb{H}^n$ et un point de $\partial_\infty\mathbb{H}^n$ (respectivement deux points distincts de $\partial_\infty\mathbb{H}^n$) sont reliés par un unique rayon géodésique (respectivement une unique géodésique) égal à un segment affine semi-ouvert (respectivement égale à un segment affine ouvert).

Un sous-ensemble C de $\mathbb{H}^n$ ou de $\overline{\mathbb{H}}^n$ est dit *convexe* s'il est convexe au sens de la géométrie affine dans la carte affine $\mathbb{A}^n$. Une condition équivalente, si C est inclus dans $\mathbb{H}^n$, est de demander que C est géodésiquement convexe.

1.2. Groupes convexes-cocompacts, leurs ensembles limites

DÉFINITION 1.1. — *Un sous-groupe Γ de $\mathbf{O}(n,1)$ est dit* convexe-cocompact *s'il existe un sous-ensemble non vide C de $\mathbb{H}^n$, convexe, Γ-invariant et sur lequel l'action de Γ est propre et cocompacte.*

Le convexe C est alors nécessairement fermé et le sous-groupe Γ est nécessairement discret. En remplaçant éventuellement C par un voisinage métrique $N_\delta(C) = \{\ell \in \mathbb{H}^n \mid \mathrm{dist}_{\mathbb{H}^n}(\ell, C) \leq \delta\}$, le quotient $\Gamma\backslash C$ est une orbivariété à bord dont le groupe fondamental orbifold est égal à Γ. Le groupe Γ est donc de *type fini* et même de présentation finie. Les sous-groupes finis de $\mathbf{O}(n,1)$ sont toujours convexes-cocompacts ; il est alors sensé de n'étudier que des groupes infinis. Un sous-groupe cyclique infini $\langle\gamma\rangle$ de $\mathbf{O}(n,1)$ est convexe-cocompact si et seulement si l'élément γ est hyperbolique ; il a alors un unique axe de translation qui est une géodésique de $\mathbb{H}^n$, le convexe C peut être choisi égal à cet axe.

Si Γ est un sous-groupe de $\mathbf{O}(n,1)$, son *ensemble limite* $\Lambda_\Gamma \subset \partial_\infty\mathbb{H}^n$ est défini comme l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite $\Gamma \cdot \ell_0 \subset \mathbb{H}^n$ ($\ell_0 = \mathbf{R}e_{n+1}$) dans le bord à l'infini $\partial_\infty\mathbb{H}^n$. C'est aussi l'ensemble de points d'accumulation de toute