Séminaire BOURBAKI Octobre 2017
70e année, 2017–2018, no 1139, p. 125 à 166
doi:10.24033/ast.1083

LA THÉORIE DE HODGE DES BIMODULES DE SOERGEL
[d'après Soergel et Elias-Williamson]

par **Simon RICHE**

INTRODUCTION

0.1. Bimodules de Soergel

Les *bimodules de Soergel* sont certains bimodules gradués sur des algèbres de polynômes, associés à un système de Coxeter (W, S) et une représentation V de W.

Ces bimodules ont été introduits au début des années 90 dans les travaux de Soergel [**29, 30**], dans le cas particulier où W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique semisimple complexe G, et V est l'algèbre de Lie d'un tore maximal de G. Dans ce cas Soergel montre que cette catégorie est équivalente à la catégorie des complexes semisimples B-équivariants (pour la t-structure perverse) sur la variété de drapeaux G/B de G (où $B \subset G$ est un sous-groupe de Borel) ; on en déduit que

1. l'anneau de Grothendieck scindé de cette catégorie est canoniquement isomorphe à l'algèbre de (Iwahori-)Hecke $\mathscr{H}_{(W,S)}$ de (W, S) ;
2. les bimodules de Soergel indécomposables (à décalage près de la graduation) sont paramétrés par W (on notera B_w le bimodule associé à $w \in W$) ;
3. les classes de ces objets dans l'anneau de Grothendieck, identifié à $\mathscr{H}_{(W,S)}$, forment la *base de Kazhdan-Lusztig* de $\mathscr{H}_{(W,S)}$.

En utilisant ces propriétés, Soergel obtient alors une nouvelle preuve de la conjecture de Kazhdan-Lusztig [**18**] sur les multiplicités dans la catégorie $\mathscr{O}$ de l'algèbre de Lie semisimple complexe duale de G au sens de Langlands, prouvée précédemment et par d'autres méthodes [(1)] par Beĭlinson-Bernstein [**3**] et Brylinski-Kashiwara [**6**].

[(1)] On renvoie à [**35**] pour une présentation de ces travaux.

Dans un travail ultérieur [**33**] (après des premiers résultats obtenus dans [**30**]), Soergel a défini [(2)] et étudié ces bimodules pour un système de Coxeter arbitraire et une représentation de W satisfaisant une certaine condition technique [(3)]. Dans ce cadre il n'existe pas de « géométrie » associée, de sorte que les arguments utilisés sont nécessairement algébriques. Il montre dans cet article que les propriétés (1) et (2) ci-dessus sont vraies dans cette généralité. Par contre, la propriété (3) s'avère être beaucoup plus subtile, et n'est énoncée que comme une conjecture (sous l'hypothèse que le corps de base est de caractéristique 0). Soergel remarque que cette conjecture impliquerait la positivité des polynômes de Kazhdan-Lusztig (comme conjecturé par Kazhdan-Lusztig [**18**]), c'est-à-dire une solution à l'un des problèmes centraux dans la combinatoire des groupes de Coxeter.

Depuis ces travaux fondateurs, les bimodules de Soergel (sous différentes formes) se sont révélés être des outils extrêmement utiles en théorie des représentations (voir [**30, 34, 37, 9, 4, 26**] pour quelques exemples), car ils permettent souvent de faire un lien avec la géométrie d'une variété de drapeaux appropriée. Mais dans tous les cas la preuve de certaines de leurs propriétés sort du cadre algébrique de leur définition, et repose sur la géométrie.

0.2. Les résultats d'Elias-Williamson

L'objet principal de cet exposé est d'expliquer la preuve, due à Elias-Williamson [**10**], de la conjecture de Soergel évoquée au §0.1. Soergel remarque dans [**33**] que, si on cherche à démontrer la conjecture par récurrence sur la longueur de l'élément de W considéré, on doit vérifier que certaines formes bilinéaires sur des espaces de morphismes sont non dégénérées. L'intuition fondamentale de Elias-Williamson est que cette propriété n'est que la partie émergée d'un iceberg beaucoup plus profond : les bimodules de Soergel possèdent toute une « théorie de Hodge » qu'il faut construire en même temps qu'on démontre la conjecture de Soergel.

Plus précisément, Elias-Williamson se placent dans le cadre d'une représentation V *réelle* de (W, S) qui possède la propriété technique de Soergel et une autre condition de « positivité » [(4)]. (Chaque groupe de Coxeter possède une représentation de ce type.) On pose $R := \mathrm{Sym}(V^*)$, qu'on considère comme un anneau gradué engendré en degré 2. Ils considèrent alors un certain élement $\rho \in V^* = R^2$ et remarquent que

[(2)] Dans [**33**], Soergel utilise le terme « speziellen Bimoduln » pour ces objets. Les premières occurences du terme « bimodules de Soergel » dans la littérature semblent être dans [**28**] et [**19**].

[(3)] Wolfgang Soergel m'a fait savoir qu'il tenait à remercier particulièrement Patrick Polo pour ses contributions dans la genèse de l'article [**33**].

[(4)] La preuve d'Elias-Williamson repose sur l'utilisation de l'ordre sur $\mathbb{R}$, et donc ne s'applique pas à d'autres corps de coefficients. Les spécialistes semblent douter de la véracité de la conjecture de Soergel sur d'autres corps de caractéristique 0. (Divers contre-exemples sont connus en caractéristique positive.)

si $w \in W$ et si la conjecture de Soergel est connue pour w (c'est-à-dire si la classe dans le groupe de Grothendieck scindé du bimodule indécomposable B_w associé à w est l'élément de la base de Kazhdan-Lusztig associé à w) alors B_w possède une forme bilinéaire symétrique « invariante » $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w} : \mathsf{B}_w \times \mathsf{B}_w \to R$ canonique, unique à un scalaire dans $\mathbb{R}_{>0}$ près. On notera de même la forme bilinéaire symétrique $(\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}) \times (\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ induite par $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$. Ils démontrent simultanément, par récurrence sur la longueur de w, que :

1. la conjecture de Soergel est vraie pour w ;
2. $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile, au sens où pour tout $i \geq 0$ la multiplication par ρ^i induit un isomorphisme $(\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^{-i} \xrightarrow{\sim} (\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^i$ entre les parties de degré $-i$ et i ;
3. $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}$, muni de la forme induite par $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$, vérifie les relations de Hodge-Riemann, au sens où pour tout $i \geq 0$ la restriction de la forme $(x, y) \mapsto \langle x, \rho^i \cdot y \rangle_{\mathsf{B}_w}$ sur $(\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R})^{-i}$ aux éléments primitifs (c'est-à-dire annulés par ρ^{i+1}) est $(-1)^{\frac{\ell(w)-i}{2}}$-définie [5] (où ℓ désigne la fonction de longueur sur W).

Notons que la propriété (3) est l'étape cruciale pour démontrer (1), mais que d'un autre côté cette propriété n'a un sens précis qu'une fois que (1) est démontrée (pour que la forme bilinéaire $\langle -, - \rangle_{\mathsf{B}_w}$ soit fixée). Les preuves de ces deux propriétés sont donc nécessairement imbriquées. La propriété (2) est elle impliquée par (3), mais joue un rôle crucial dans la récurrence.

Dans le cas où W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique complexe G, et où V est l'algèbre de Lie d'un tore maximal, $\mathsf{B}_w \otimes_R \mathbb{R}$ s'identifie à la cohomologie d'intersection de la variété de Schubert associée à W. Dans ce cas, les propriétés (2) et (3) découlent du théorème de Lefschetz difficile et des relations de Hodge-Riemann « classiques », appliqués à ce cas particulier. On renvoie à **[11, 42]** pour plus de détails.

0.3. Structure de la preuve

La structure de la preuve de **[10]** est inspirée par la preuve du Théorème de Décomposition donnée récemment par de Cataldo-Migliorini. (Voir **[7, 40]** pour des présentations de cette preuve. Notons cependant que la « traduction » de ces idées dans le langage algébrique des bimodules de Soergel est hautement non triviale !) On a essayé de ne présenter que les parties indispensables de cette preuve, quitte à omettre certains résultats intermédiaires intéressants mais qui peuvent être contournés (voir par exemple la remarque 2.10).

[5] Ici on dit qu'une forme bilinéaire symétrique est $(+1)$-définie, resp. (-1)-définie, si elle est définie positive, resp. définie négative.

Comme expliqué ci-dessus, la preuve procède par récurrence sur la longueur de l'élément considéré. On fixe donc $w \in W \setminus \{e\}$, on écrit $w = ys$ avec $s \in S$ et $\ell(y) < \ell(w)$, et on suppose toutes les propriétés voulues pour les éléments de longueur $\leq \ell(y)$. Comme suggéré au §0.2, pour démontrer la conjecture de Soergel pour w il faut vérifier que certaines formes bilinéaires sur des espaces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s)$ (où $\ell(z) \leq \ell(y)$) sont non dégénérées où $\mathscr{B}$ désigne la catégorie des bimodules de Soergel considérés. Pour ce faire, Elias-Williamson remarquent que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(\mathsf{B}_z, \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s)$ s'injecte (par une isométrie pour des formes bilinéaires appropriées) dans le sous-espace des éléments primitifs dans $\big((\mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s) \otimes_R \mathbb{R}\big)^{-\ell(z)}$. Puisque la restriction à un sous-espace d'une forme bilinéaire symétrique définie positive ou négative est non dégénérée, ceci ramène la preuve de la conjecture de Soergel pour w à un résultat de type « Hodge-Riemann » pour $\mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s$. Il est par ailleurs facile de voir que le théorème de Lefschetz difficile et les relations de Hodge-Riemann pour B_w découlent également de ce résultat.

Pour démontrer cet énoncé, Elias-Williamson considèrent l'opérateur de Lefschetz « déformé »

$$L_\zeta^{y,s} := \rho \cdot \mathrm{id}_{\mathsf{B}_y \otimes \mathsf{B}_s} + \mathrm{id}_{\mathsf{B}_y} \otimes (\zeta\rho \cdot \mathrm{id}_{\mathsf{B}_s}) : \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s \to \mathsf{B}_y \otimes_R \mathsf{B}_s(2)$$

pour $\zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. (Ici, (2) désigne le foncteur de décalage de la graduation par 2 vers la gauche.) Ils remarquent tout d'abord que les relations de Hodge-Riemann pour B_y impliquent que $L_\zeta^{y,s}$ vérifie le résultat voulu si $\zeta \gg 0$. En utilisant le fait que ce résultat peut s'énoncer en terme de la signature de certaines formes bilinéaires symétriques, et que la signature ne peut pas varier dans une famille continue de formes bilinéaires symétriques non dégénérées, ceci ramène la preuve du résultat voulu à vérifier que $L_\zeta^{y,s}$ vérifie le théorème de Lefschetz difficile pour tout $\zeta \geq 0$.

Dans leur preuve de l'énoncé géométrique correspondant, de Cataldo-Migliorini utilisent le théorème de Lefschetz faible pour une section hyperplane. Cet énoncé n'a aucun analogue dans le monde des bimodules de Soergel, et Elias-Williamson utilisent à la place des différentielles apparaissant dans les « complexes de Rouquier », qui permettent de factoriser l'opérateur $\rho \cdot \mathrm{id}_{\mathsf{B}_y}$ en une composée $\mathsf{B}_y \to D(1) \to \mathsf{B}_y(2)$, où D est une somme de termes de la forme B_z avec $\ell(z) < \ell(y)$ qui vérifie une version appropriée des relations de Hodge-Riemann pour une forme convenable. Notons que cet argument impose de considérer également les relations de Hodge-Riemann pour l'opérateur L_ζ sur $\mathsf{B}_z \otimes_R \mathsf{B}_s$ (quand $\ell(zs) > \ell(z)$) comme une hypothèse de récurrence, en plus des propriétés considérées au §0.2.

0.4. Applications

La preuve de la conjecture de Soergel a deux applications très importantes, déjà suggérées au §0.1. La première est qu'elle permet de donner une preuve algébrique de la conjecture de Kazhdan-Lusztig concernant les multiplicités des modules simples dans les modules de Verma d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. La seconde application (suggérée par Soergel dans [**33**]) est la preuve d'une autre conjecture de Kazhdan-Lusztig affirmant que les coefficients des *polynômes de Kazhdan-Lusztig* (des polynômes apparaissant dans diverses formules de caractères en théorie de Lie) sont positifs ou nuls. Cette conjecture était connue quand W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique (ou plus généralement d'un groupe de Kac-Moody) ; mais dans le cas général elle constituait un des problèmes centraux du domaine depuis sa formulation en 1979.

0.5. Prolongements

Du point de vue d'Elias-Williamson, les résultats énoncés au §0.2 forment la théorie de Hodge « globale » des bimodules de Soergel. Dans des articles ultérieurs [**39, 12**], ils ont développé des versions « locale » et « relative » de cette théorie, qui ont également des applications importantes en théorie de Lie. Pour des raisons de place, ces résultats (et leurs applications) ne sont évoqués que brièvement, à la fin de ces notes.

0.6. Contenu des notes

Dans la partie 1, on rappelle les résultats de base sur les bimodules de Soergel, suivant [**33**]. Dans la partie 2 on présente les résultats principaux de [**10**] et leurs preuves. Dans la partie 3 on expose les applications de ces résultats. Enfin, dans la partie 4 on évoque brièvement les résultats de [**39**] et [**12**].

0.7. Remerciements

Je remercie Geordie Williamson pour de nombreuses discussions autour de ces travaux et de résultats connexes, avant et pendant la préparation de cet exposé, ainsi que pour ses remarques sur une version préliminaire de ces notes. Je remercie également Wolfgang Soergel pour l'autorisation de reproduire sa preuve de la proposition 1.13 et pour ses remarques sur une version préliminaire de ce texte, et George Lusztig pour ses remarques. Enfin, je remercie V. Le Dret pour sa relecture très attentive de ces notes.

Ce travail a bénéficié du soutien de la bourse ANR-13-BS01-0001-01 de l'Agence Nationale de la Recherche. This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No. 677147).