Séminaire BOURBAKI Janvier 2018
70e année, 2017-2018, no 1140, p. 167 à 204
doi:10.24033/ast.1084

PROGRÈS RÉCENTS SUR LES CONJECTURES DE GAN-GROSS-PRASAD [d'après Jacquet-Rallis, Waldspurger, W. Zhang, etc.]

par **Raphaël BEUZART-PLESSIS**

INTRODUCTION

Les conjectures de Gan-Gross-Prasad [**17**] ont deux aspects : local et global. Localement, celles-ci portent sur certaines lois de branchements entre représentations de groupes de Lie réels ou p-adiques tandis que globalement, elles caractérisent la non-annulation de certaines intégrales explicites de formes automorphes que l'on appelle communément des périodes (automorphes). Ce qui rend ces prédictions intéressantes est qu'elles font intervenir des invariants arithmétiques fins : facteurs epsilon locaux d'une part et valeurs de fonctions L automorphes en leur centre de symétrie d'autre part. Ces conjectures, qui portent sur tous les groupes classiques (unitaires d'espaces hermitiens ou antihermitiens, symplectiques et spéciaux orthogonaux ; ce dernier cas avait d'ailleurs été considéré bien avant par Gross et Prasad [**25**], [**26**]), ont connu de nombreux progrès récents. Plus précisément, la conjecture locale est maintenant démontrée dans presque tous les cas après le travail fondateur de Waldspurger [**63**], [**66**], [**64**], [**65**] et Mœglin-Waldspurger [**45**] suivi de l'auteur [**7**], [**5**], [**6**], [**10**], Gan-Ichino [**19**], Hiraku Atobe [**4**] et enfin Hongyu He [**30**]. La conjecture globale a quant à elle été établie pour les groupes unitaires d'espaces hermitiens sous certaines restrictions locales dans une percée de Wei Zhang [**77**] faisant suite aux travaux de Jacquet-Rallis [**36**] et Zhiwei Yun [**75**]. Des résutats analogues ont été obtenus pour les groupes unitaires d'espaces antihermitiens par Hang Xue [**70**] à la suite de Yifeng Liu [**41**]. Il existe aussi un raffinement de la conjecture globale, initialement dû à Ichino-Ikeda [**34**] dans le cas des groupes orthogonaux puis étendu aux groupes unitaires et symplectiques par Neal Harris [**29**] et Hang Xue [**71**] [**73**], sous la forme d'une identité reliant explicitement périodes et valeurs centrales de fonctions L automorphes. Ce

() Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-13-BS01-0012 FERPLAY.

raffinement est maintenant lui aussi démontré pour les groupes unitaires sous certaines hypothèses locales après Wei Zhang [**76**], l'auteur [**9**] et Hang Xue [**71**], [**72**].

Dans ce texte, on se propose d'énoncer précisément ces conjectures et les résultats récents sus-mentionnés ainsi que de donner de brefs aperçus des preuves qu'il serait bien difficile de retranscrire fidèlement ici tant les techniques utilisées sont variées (formules des traces relatives, correspondance thêta, théorie de l'endoscopie...). De plus, comme nous l'avons déjà expliqué, ces conjectures portent sur tous les types de groupes classiques chacun ayant ses propres spécificités. Pour des raisons de place, on se concentrera sur le cas des groupes unitaires pour lesquels les résultats obtenus sont les plus exhaustifs. Enfin, on renvoie aussi à [**16**] pour une très bonne introduction à ce sujet (datant de 2013 cet article ne fait malheureusement pas mention des avancées les plus récentes).

Les applications arithmétiques de ces conjectures ne seront pas discutées ici mais citons les travaux récents [**27**], [**50**] comme exemples de telles applications.

On finit cette introduction en donnant deux exemples de résultats antérieurs qui sont des cas particuliers des conjectures de Gan-Gross-Prasad.

Loi de branchement de $U(n+1)$ à $U(n)$. — On commence par donner un exemple classique de loi de branchement (dû à H. Weyl [**69**]) constituant un cas particulier des conjectures locales. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on notera

$$U(k) := \{g \in GL_k(\mathbb{C});\ {}^t\overline{g}g = I_k\}$$

le groupe unitaire réel compact de rang k. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On dispose d'un plongement naturel

$$U(n) \hookrightarrow U(n+1),\ g \mapsto \begin{pmatrix} g & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit π une représentation complexe irréductible de $U(n+1)$. Une telle représentation est nécessairement de dimension finie (car $U(n+1)$ est compact) et on s'intéresse à la restriction de π à $U(n)$. La description explicite de cette restriction, ou plutôt de sa décomposition en représentations irréductibles, constitue ce que l'on appelle une loi de branchement. Évidemment, toute réponse intelligible à ce problème nécessite de savoir paramétrer (ou nommer) de façon indépendante les représentations irréductibles (à isomorphisme près) de $U(n)$ et $U(n+1)$. Une telle paramétrisation est précisément fournie par la théorie des plus hauts poids de Cartan-Weyl. Dans les cas qui nous intéressent cette théorie fournit des bijections naturelles

$$\begin{aligned}
\mathrm{Irr}(U(n+1)) &\simeq \{\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}^{n+1};\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n+1}\} \\
\pi_{\underline{\alpha}} &\leftarrow\!\shortmid \underline{\alpha} \\
\mathrm{Irr}(U(n)) &\simeq \{\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^{n};\ \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_n\} \\
\sigma_{\underline{\beta}} &\leftarrow\!\shortmid \underline{\beta},
\end{aligned}$$

où $\mathrm{Irr}(U(n+1))$ et $\mathrm{Irr}(U(n))$ désignent les ensembles de classes d'isomorphisme de représentations irréductibles complexes de $U(n+1)$ et $U(n)$ respectivement. En utilisant ces paramétrisations, la solution au problème initial se formule ainsi (voir **[24]** Chap. 8 par exemple) : pour tout $n+1$-uplet $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{Z}^n$ avec $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{n+1}$, on a

$$\pi_{\underline{\alpha}}|_{U(n)} = \bigoplus_{\substack{\underline{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_n)\in\mathbb{Z}^n \\ \alpha_1\geqslant\beta_1\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant\beta_n\geqslant\alpha_{n+1}}} \sigma_{\underline{\beta}}.$$

En d'autres termes : pour toute paire de représentations irréductibles $(\pi_{\underline{\alpha}}, \sigma_{\underline{\beta}}) \in \mathrm{Irr}(U(n+1)) \times \mathrm{Irr}(U(n))$ l'espace d'entrelacements

$$\mathrm{Hom}_{U(n)}(\pi_{\underline{\alpha}}, \sigma_{\underline{\beta}})$$

est de dimension au plus 1 et est non nul si et seulement si $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ satisfont la condition de branchement $\alpha_1 \geqslant \beta_1 \ldots \geqslant \beta_n \geqslant \alpha_{n+1}$. C'est sous cette forme que la conjecture locale de Gan-Gross-Prasad se généralise à des paires de groupes unitaires réels $U(p,q) \subset U(p+1,q)$ ou p-adiques $U(W) \subset U(V)$ plus généraux. Plus précisément, on verra dans la section 1.3 que pour π et σ des représentations irréductibles (dans un sens à préciser) de $U(p+1,q)$ et $U(p,q)$ l'espace d'entrelacements $\mathrm{Hom}_{U(p,q)}(\pi,\sigma)$ est toujours de dimension au plus un et qu'il en va de même si l'on considère des groupes unitaires p-adiques. La conjecture locale de Gan-Gross-Prasad donne alors (dans presque tous les cas) une condition nécessaire et suffisante, généralisant la relation de branchement ci-dessus, pour que cet espace soit non nul.

La formule de Waldspurger pour les formes de Maass de niveau 1. — Énonçons maintenant un cas particulier d'un résultat de Waldspurger **[61]** dont les conjectures globales donnent une généralisation. Soit $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$ le demi-plan de Poincaré et $f : SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ une forme de Maass propre de niveau 1. Rappelons ce que cela signifie : f est une fonction C^∞ (et même analytique réelle) qui est vecteur propre du Laplacien hyperbolique $\Delta := -y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ de valeur propre λ (i.e. $\Delta f = \lambda f$), invariante pour l'action de $SL_2(\mathbb{Z})$ par homographies (donnée par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z := \frac{az+b}{cz+d}$), à croissance modérée dans le sens où $|f(x+iy)| \ll Cy^N$ pour un certain N lorsque $y \to \infty$ et propre pour tous les opérateurs de Hecke T_p, p un nombre premier, définis par

$$(T_p f)(z) = f\Big(\left(\begin{smallmatrix} p & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) z\Big) + \sum_{u=0}^{p-1} f\Big(\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ & p \end{smallmatrix}\right) z\Big).$$

Puisque $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z = z+1$, une telle fonction admet un développement de Fourier de la forme

$$f(x+iy) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(y) e^{2i\pi nx}, \quad x+iy \in \mathbb{H}.$$

De plus, l'équation différentielle vérifiée par f ainsi que la propriété de croissance modérée impliquent que les fonctions $a_n(y)$ sont, pour $n \neq 0$, de la forme $a_n(y) = a_n\sqrt{y}K_\nu(2\pi|n|y)$ où $a_n \in \mathbb{C}$ et K_ν est une fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce de paramètre $\nu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\lambda = \frac{1}{4} - \nu^2$. On suppose dorénavant f paire (i.e. $f(-\bar{z}) = f(z)$) et cuspidale (i.e. $a_0(y) = 0$). On a alors $a_{-n} = a_n$ pour $n \neq 0$ et on définit la fonction L complétée de f par

$$L(s,f) = \pi^{-s}\Gamma\Big(\frac{s+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s-\nu}{2}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\ \ \mathrm{Re}(s) \gg 1.$$

Pour χ un caractère de Dirichlet quadratique vérifiant $\chi(-1) = -1$ on définit aussi une fonction L complétée tordue par χ de la façon suivante

$$L(s,f\times\chi) = \pi^{-s}\Gamma\Big(\frac{s-1+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s-1-\nu}{2}\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\frac{a_n}{n^s},\ \ \mathrm{Re}(s) \gg 1.$$

Alors $L(.,f)$ et $L(.,f\times\chi)$ admettent des prolongements holomorphes à $\mathbb{C}$ et satisfont les équations fonctionnelles $L(1-s,f) = L(s,f)$ et $L(1-s,f\times\chi) = L(s,f\times\chi)$. Soit F une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ de discriminant fondamental d (i.e. si $F = Q[\sqrt{d_0}]$ avec d_0 un entier sans facteur carré alors $d = d_0$ si d_0 est congru à 1 modulo 4, $4d_0$ sinon). On appelle *point de Heegner* (relatif à F) l'unique racine z_d dans $\mathbb{H}$ d'un trinôme de la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a,b,c \in \mathbb{Z}$ vérifiant $b^2 - 4ac = d$. On a alors la formule suivante, cas particulier d'un résultat de Waldspurger **[61]** :

$$\Bigg(\sum_{z_d/SL_2(\mathbb{Z})} f(z_d)\Bigg)^2 = \frac{\sqrt{|d|}}{2}L\Big(\frac{1}{2},f\Big)L\Big(\frac{1}{2},f\times\chi_d\Big), \tag{1}$$

où la somme porte sur l'ensemble des orbites sous $SL_2(\mathbb{Z})$ de points de Heegner et χ_d désigne l'unique caractère de Dirichlet quadratique de conducteur $|d|$ vérifiant $\chi_d(-1) = -1$.

Appliquée à ce cas particulier la conjecture globale de Gan-Gross-Prasad prédit (à quelques nuances près) l'équivalence

$$\sum_{z_d/SL_2(\mathbb{Z})} f(z_d) \neq 0 \Leftrightarrow L(\frac{1}{2},f)L(\frac{1}{2},f\times\chi_d) \neq 0,$$

tandis que le raffinement de la conjecture globale par Ichino et Ikeda permet de retrouver directement la formule (1).

1. LA CONJECTURE LOCALE

1.1. Les groupes

Soit E/F une extension quadratique de corps locaux de caractéristique nulle. On a donc soit $E/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$ soit que E et F sont des extensions finies du corps des nombres p-adiques $\mathbb{Q}_p$ pour un certain nombre premier p ($\mathbb{Q}_p$ est le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique $|.|_p$ définie par $|p^k \frac{a}{b}|_p = p^{-k}$ pour a et b des entiers premiers à p). On note σ l'unique élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(E/F)$ et $\mathrm{sgn}_{E/F}$ le caractère quadratique de $F^\times$ associé à l'extension E/F par la théorie du corps de classe (c'est donc l'unique caractère quadratique de noyau l'image de la norme $\mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$). Enfin, on fixera deux caractères additifs non triviaux $\psi_0 : F \to \mathbb{S}^1$ et $\psi : E \to \mathbb{S}^1$ avec la propriété que ψ est trivial sur F.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur E et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. On suppose V muni d'une forme ε-hermitienne non dégénérée

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to E.$$

Par définition une forme ε-hermitienne vérifie

$$\langle \lambda v + \mu w, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle + \mu \langle w, u \rangle$$
$$\langle v, u \rangle = \varepsilon \langle u, v \rangle^\sigma$$

pour tous $u, v, w \in V$ et $\lambda, \mu \in E$. Suivant que $\varepsilon = 1$ ou -1 on parlera aussi d'espace hermitien ou antihermitien. On se donne un sous-espace W de V non dégénéré pour $\langle .,. \rangle$ vérifiant la condition suivante

$$\dim(V) - \dim(W) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon = 1; \\ 0, & \text{si } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Soient $U(V) \subset GL(V)$ et $U(W) \subset GL(W)$ les sous-groupes algébriques (définis sur F) des automorphismes linéaires de V et W respectivement qui préservent la forme $\langle .,. \rangle$. Alors $U(V)$ et $U(W)$ sont des groupes unitaires et on dispose d'un plongement naturel $U(W) \hookrightarrow U(V)$ où $U(W)$ agit trivialement sur $W^\perp$ (qui est de dimension au plus 1). Dans toute la suite on identifiera (abusivement) un groupe algébrique défini sur F avec le groupe des F-points lui correspondant.

La discussion qui suit s'étend aussi au cas où $E = F \times F$ muni de l'involution $\sigma(x, y) = (y, x)$, cas qu'il sera de toute façon nécessaire d'inclure lorsque l'on traitera la conjecture globale. Dans une telle situation, une forme non dégénérée $\langle .,. \rangle$ comme ci-dessus identifie V et W à des sommes directes $V_0 \oplus V_0^\vee$ et $W_0 \oplus W_0^\vee$ où $W_0 \subset V_0$ sont des espaces vectoriels de dimensions finies sur F et $V_0^\vee$, $W_0^\vee$ désignent leurs duaux. On a alors des identifications naturelles $U(V) \simeq GL(V_0)$ et $U(W) \simeq GL(W_0)$.