Séminaire BOURBAKI Janvier 2018
70^{e} année, 2017–2018, n^{o} 1142, p. 251 à 288
doi:10.24033/ast.1086

MÉTHODES ENTROPIQUES POUR LES CONVOLUTIONS DE BERNOULLI [d'après Hochman, Shmerkin, Breuillard, Varjú]

par **Sébastien GOUËZEL**

1. INTRODUCTION

L'exemple le plus classique d'ensemble autosimilaire dans $\mathbb{R}$, l'ensemble triadique de Cantor $C_{1/3}$, peut être décrit comme suit. Pour $\lambda = 1/3$, considérons l'ensemble $\Phi = \Phi_\lambda = \{x \mapsto \lambda x, x \mapsto 1+\lambda(x-1)\}$ des deux contractions affines de rapport λ et de points fixes respectifs 0 et 1. Alors l'unique compact non vide de $\mathbb{R}$ invariant par les éléments de Φ est $C_{1/3}$. Cette description se prête à une reformulation dynamique : partons d'un compact non vide K_0 de $\mathbb{R}$, par exemple $K_0 = [0,1]$, et définissons une suite par $K_{n+1} = \Phi(K_n) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} \varphi(K_n)$. Alors cette suite converge (en topologie de Hausdorff) vers $C_{1/3}$, quel que soit le compact de départ K_0, puisque l'application $K \mapsto \Phi(K)$ est contractante d'un facteur λ pour la distance de Hausdorff et a $C_{1/3}$ pour point fixe. Pour $K_0 = [0,1]$, alors $K_1 = [0,1/3] \cup [1/3,2/3]$, et K_n correspond à la n-ième étape dans la description géométrique habituelle de $C_{1/3}$, où l'on retire le tiers central des intervalles conservés à l'étape précédente.

Cette construction fonctionne en fait pour tout $\lambda \in]0,1[$. Lorsque $\lambda \in]0,1/2[$, l'ensemble C_λ obtenu est encore un ensemble de Cantor, tout à fait analogue à $C_{1/3}$. En revanche, si $\lambda \in [1/2,1[$, on a $C_\lambda = [0,1]$. En effet, si l'on part de $K_0 = [0,1]$, alors $K_1 = [0,\lambda] \cup [1-\lambda,1]$ coïncide avec K_0 (il y a même un recouvrement). Il en va donc de même de tous les K_n, et de leur limite.

La situation devient plus intéressante si l'on remplace les ensembles par des mesures de probabilité. Partons d'une mesure de probabilité arbitraire κ_0 à support compact, et définissons $\kappa_{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{\varphi\in\Phi_\lambda} \varphi_*(\kappa_n)$. En notant K_0 le support de κ_0, alors le support de κ_n est l'ensemble K_n défini ci-dessus. De plus, comme l'application $\kappa \mapsto \frac{1}{2}\sum_{\varphi\in\Phi_\lambda} \varphi_*(\kappa)$ est contractante de rapport λ pour une distance adaptée sur les mesures de probabilité à support compact (la distance de Wasserstein W_1), la suite κ_n converge vers une mesure limite $\bar{\mu}_\lambda$, de support égal à C_λ et indépendante du choix de κ_0. C'est l'unique mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui est *stationnaire* pour l'action de Φ_λ : elle est caractérisée par l'égalité $\bar{\mu}_\lambda = \frac{1}{2}\sum_{\varphi\in\Phi_\lambda}\varphi_*(\bar{\mu}_\lambda)$. Lorsque $\lambda < 1/2$, c'est la mesure uniforme classique sur l'ensemble de Cantor C_λ, donnant une mesure 2^{-n} à chacun des 2^n intervalles de n-ième génération dans la construction géométrique de C_λ (c'est aussi la mesure de Hausdorff de dimension $\log 2/|\log\lambda|$ sur C_λ). Pour $\lambda = 1/2$, c'est exactement la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ puisque, si l'on part de $\kappa_0 = \mathrm{Leb}_{[0,1]}$, alors toutes les mesures κ_n coïncident avec $\mathrm{Leb}_{[0,1]}$. En revanche, la situation est plus complexe pour $\lambda \in]1/2, 1[$: le recouvrement dans la décomposition $K_1 = [0,\lambda]\cup[1-\lambda,1]$ rend la mesure κ_1 inhomogène, donnant proportionnellement plus de poids à l'intervalle central $[1-\lambda,\lambda]$ qu'aux deux bouts. Cette inhomogénéité se transfère ensuite, par itération, à toutes les échelles.

Le problème central auquel cet exposé est consacré est l'exploration de la régularité de la mesure $\bar{\mu}_\lambda$, et en particulier des paramètres $\lambda \in [1/2, 1[$ pour lesquels $\bar{\mu}_\lambda$ est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) : les seuls paramètres pour lesquels on sait que $\bar{\mu}_\lambda$ n'est pas absolument continue sont les inverses des nombres de Pisot, et il est bien possible que ce soit les seuls, même si ce problème est encore ouvert. Les résultats récents que l'on décrira plus bas indiquent que les paramètres exceptionnels λ pour lesquels $\bar{\mu}_\lambda$ n'est pas absolument continue forment un petit ensemble, en un sens que l'on précisera.

En sus de leur description géométrique, les mesures $\bar{\mu}_\lambda$ admettent une description équivalente plus probabiliste, et souvent plus pratique pour les démonstrations, qui explique le nom de *convolutions de Bernoulli* qu'on leur donne. Soit $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de type Bernoulli, i.e., qui valent 1 ou -1 avec probabilité $1/2$ (on peut prendre par exemple les fonctions coordonnées sur l'espace $\Omega = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la mesure $\mathbb{P} = ((\delta_{-1}+\delta_1)/2)^{\otimes\mathbb{N}}$). Formons la somme $X_\infty = \sum_{n\geqslant 0}\xi_n\lambda^n$, c'est une série aléatoire convergente dont la loi μ_λ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, donnée par

$$\mu_\lambda(A) = \mathbb{P}\left(\sum_{n\geqslant 0}\xi_n\lambda^n \in A\right).$$

On peut aussi écrire $\mu_\lambda = (X_\infty)_*\mathbb{P}$ si l'on souhaite éviter complètement le langage probabiliste. Comme la loi d'une somme de variables indépendantes est la convolution des lois de ces variables, la définition précédente permet aussi d'écrire μ_λ comme un produit de convolution infini de lois de Bernoulli :

$$\mu_\lambda = \mathop{\Large *}_{n\geqslant 0}\frac{\delta_{-\lambda^n}+\delta_{\lambda^n}}{2}. \tag{1.1}$$

En isolant la variable ξ_0 (qui vaut -1 ou 1 avec probabilité $1/2$) et en notant que la loi de $\sum_{n\geqslant 1}\xi_n\lambda^n$ coïncide avec μ_λ à une contraction de facteur λ près, on obtient l'égalité

$$\mu_\lambda = \frac{1}{2}\Big((x \mapsto -1+\lambda x)_* \mu_\lambda + (x \mapsto 1+\lambda x)_* \mu_\lambda\Big). \tag{1.2}$$

C'est la même équation que celle satisfaite par $\bar{\mu}_\lambda$, à un changement affine de coordonnées près (envoyant $-1/(1-\lambda)$ sur 0 et $1/(1-\lambda)$ sur 1). Ce changement de coordonnées envoie donc μ_λ sur $\bar{\mu}_\lambda$ (il envoie aussi la loi de $X_N = \sum_{n<N} \xi_n \lambda^n$ sur la mesure κ_N issue par le procédé décrit plus haut de $\kappa_0 = \delta_{1/2}$), et les propriétés de régularité des mesures sont exactement les mêmes. Dans la suite, on travaillera uniquement avec μ_λ, mais le lecteur est invité à garder en tête le point de vue géométrique expliqué plus haut.

La question de la régularité de cette mesure peut sembler anecdotique. Il faut cependant y penser comme à un modèle extrêmement basique pour toutes les situations où de l'autosimilarité est présente (comme on en rencontre souvent en systèmes dynamiques, en théorie géométrique de la mesure, en probabilités) : les outils sophistiqués qui ont été développés pour étudier les convolutions de Bernoulli ont tous trouvé des applications dans des domaines beaucoup plus larges (au prix de complications techniques). C'est donc une sorte de terrain de jeux, où tester de nouvelles idées et de nouvelles techniques dans un contexte aussi simplifié que possible (mais de nombreuses questions fondamentales y restent encore ouvertes !)

Il est facile de voir que l'ensemble $\mathscr{E}_\perp \subseteq \left]1/2, 1\right[$ des paramètres exceptionnels pour lesquels μ_λ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue contient les inverses des nombres de Pisot (pour ces paramètres, on sait même que μ_λ est alors de dimension < 1, voir le théorème 3.5), mais on ne connaît pas d'autre élément de $\mathscr{E}_\perp$. La question fondamentale sur les convolutions de Bernoulli est de comprendre cet ensemble. En ordonnant les énoncés par force, on peut se poser les questions suivantes :

1. Est-il de mesure de Lebesgue nulle ?
2. Est-il de dimension de Hausdorff nulle ?
3. Est-il dénombrable ?
4. Est-il uniquement composé de nombres algébriques ?
5. Est-il égal à l'ensemble des inverses des nombres de Pisot dans $\left]1/2, 1\right[$?

On peut aussi se poser les mêmes questions sur l'ensemble exceptionnel $\mathscr{E}_{<1}$ (plus petit *a priori*) des paramètres exceptionnels pour lesquels la dimension $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda)$ de la mesure μ_λ, définie dans le théorème 2.2, vérifie $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda) < 1$.

Ce texte est consacré aux résultats impressionnants démontrés récemment sur les convolutions de Bernoulli par Hochman, Shmerkin, Breuillard et Varjú [**10, 17, 18, 20, 3, 2**] suite au travail fondateur de Hochman [**10**] : il a montré comment des méthodes de combinatoire additive pouvaient être utilisées pour démontrer un énoncé sur la croissance de l'entropie des mesures par convolution, et pourquoi un tel énoncé était pertinent dans l'étude des convolutions de Bernoulli. Suite à ces résultats, on sait que $\mathscr{E}_\perp$ est de dimension de Hausdorff nulle (théorème 2.8), et très probablement que $\mathscr{E}_{<1}$ est uniquement composé de nombres algébriques (voir la conjecture 2.6, la proposition 2.7 et le théorème 4.15). Les questions 3, 4, 5 ci-dessus sont toutefois toujours ouvertes.

Cet article est organisé comme suit. La partie 2 contient les énoncés des théorèmes sur les convolutions de Bernoulli dont on souhaite évoquer les preuves par la suite. Dans la partie 3, on démontre complètement les résultats (élémentaires) sur les mesures μ_λ lorsque λ est l'inverse d'un nombre de Pisot. C'est l'occasion d'introduire l'entropie, et de se familiariser avec les problèmes qui se poseront pour les paramètres généraux. La partie 4 étudie les paramètres généraux avec un point de vue entropique. On y énonce le théorème de Hochman sur l'entropie des convolutions de Bernoulli (théorème 4.11) et on montre comment il implique plusieurs des résultats de la partie 2. Enfin, la partie 5 évoque la preuve du théorème de Hochman, en lien avec la croissance de l'entropie des mesures par convolution, et discute des extensions et raffinements de ces résultats.

2. RÉSULTATS CONNUS SUR LES CONVOLUTIONS DE BERNOULLI

Ce paragraphe est consacré à un exposé à la Prévert des propriétés connues des convolutions de Bernoulli pour les paramètres $\lambda \in [1/2, 1[$, le cas $\lambda < 1/2$ étant complètement explicite. L'ordre d'exposition est purement thématique, il ne respecte pas du tout la chronologie dans laquelle les énoncés ont été démontrés, ni leur difficulté. On reviendra plus loin sur la plupart de ces énoncés, une fois qu'on aura mis en place les outils permettant d'expliquer leurs preuves. Pour faciliter leur localisation, la numérotation d'un énoncé donnée ici correspond à l'endroit de l'article où il réapparaîtra.

Résultats pour tous les paramètres

Proposition 2.1 (Jessen et Wintner [**11**]). — *Pour $\lambda \in [1/2, 1[$, la mesure μ_λ est soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, soit totalement singulière par rapport à celle-ci.*

Démonstration. — Si μ_λ a une composante absolument continue ν non nulle, celle-ci vérifie également l'égalité de stationnarité (1.2). Comme l'application $\kappa \mapsto \frac{1}{2} \sum_{\varphi \in \Phi_\lambda} \varphi_*(\kappa)$ est contractante de rapport λ pour la distance de Wasserstein W_1, cette équation (1.2) admet une unique solution parmi les mesures de probabilité.

Ainsi, ν est un multiple (non nul) de μ_λ, ce qui montre que μ_λ elle-même est absolument continue. □

THÉORÈME 2.2 (Ledrappier [**13**], Feng et Hu [**7**]). — *Soit* $\lambda \in [1/2, 1[$. *Il existe alors un réel* $\alpha(\lambda) \in]0, 1]$ *tel que, pour* μ_λ*-presque tout* x,

$$\frac{\log \mu_\lambda([x - r, x + r])}{\log r} \xrightarrow[r \to 0]{} \alpha(\lambda).$$

On dit que μ_λ *est dimensionnellement exacte, de dimension* $\alpha(\lambda)$, *et on note* $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda) = \alpha(\lambda)$.

Cet énoncé est la conséquence d'un résultat beaucoup plus général en systèmes dynamiques, dû à Ledrappier et Young, qui affirme que toute mesure invariante par une application régulière sur une variété compacte est dimensionnellement exacte le long de sous-variétés adaptées à la dynamique. Ce théorème est démontré par des techniques entropiques, mais complètement différentes de celles dont il sera question dans cet article. Nous l'admettrons donc comme une boîte noire.

Pour clarifier le contenu de ce théorème, introduisons la notation suivante : on écrira

$$u_n \sim_{\log} v_n$$

lorsque $\log u_n / \log v_n \to 1$. Le théorème précédent affirme alors que

$$\mu_\lambda([x - r, x + r]) \sim_{\log} r^{\alpha(\lambda)}$$

(les fluctuations étant en $r^{o(1)}$). Dans $\mathbb{R}^d$, la mesure de Lebesgue des boules se comporte exactement en $C(d) r^d$. Cela justifie qu'on considère $\alpha(\lambda)$ comme une dimension.

Remarque 2.3. — Si μ_λ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda) = 1$, mais la réciproque est *a priori* fausse. Il est donc plus faible (et plus facile) de démontrer une assertion $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda) = 1$ que de démontrer l'absolue continuité de μ_λ, même si c'est déjà un résultat fort.

L'intérêt et la difficulté du problème viennent du fait que $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda)$ ne dépend pas continûment de λ. Néanmoins, cette fonction est semi-continue inférieurement :

PROPOSITION 4.10. — *La fonction* $\lambda \mapsto \mathrm{Dim}(\mu_\lambda)$ *est semi-continue inférieurement : si* $\lambda_n \to \lambda$, *alors* $\liminf \mathrm{Dim}(\mu_{\lambda_n}) \geqslant \mathrm{Dim}(\mu_\lambda)$.

Il se peut donc que $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda) = 1$ pour une grande majorité de paramètres (dense), avec au milieu de ceux-ci quelques paramètres où $\mathrm{Dim}(\mu_\lambda) < 1$. C'est précisément le comportement auquel on s'attend.

On peut minorer la dimension de μ_λ pour *tous* les paramètres, en utilisant les résultats profonds qui suivent et une preuve numérique assistée par ordinateur :