Séminaire BOURBAKI Mars 2018
70e année, 2017–2018, nº 1146, p. 379 à 426
doi:10.24033/ast.1090

DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES DES ENDOMORPHISMES DE FROBENIUS
[d'après Abel, Chebyshev, Robinson,...]

par **Jean-Pierre SERRE**

À la mémoire de mon vieil ami Michel Raynaud

INTRODUCTION

Lorsque l'on a une suite d'opérateurs linéaires de rang tendant vers l'infini, on peut s'intéresser à la distribution asymptotique de leurs valeurs propres. C'est ce que nous allons faire ici, dans le cas des endomorphismes de Frobenius des variétés abéliennes (autrement dit, des motifs purs de poids 1).

Fixons un corps fini $\mathbf{F}$, à q éléments. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des classes d'isogénie de variétés abéliennes sur $\mathbf{F}$ de dimension > 0. Si $A \in \mathcal{A}$, soit $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de son endomorphisme de Frobenius. C'est un polynôme unitaire de degré $2\dim A$, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, dont les racines complexes appartiennent au cercle C de centre 0 et de rayon $q^{1/2}$; réciproquement, d'après Honda-Tate ([**34**]), tout polynôme ayant ces propriétés provient (à une puissance près, cf. lemme 1.8.1) d'une variété abélienne sur $\mathbf{F}$. Comment se répartissent les racines de P_A quand A varie ?

Pour donner un sens précis à cette question, il est commode d'utiliser le langage des mesures : si $d = 2\dim A$, écrivons P_A sous la forme $\prod_{i=1}^{d}(X - z_i)$ et définissons une mesure μ_A sur C par $\mu_A = \frac{1}{d}\sum \delta_{z_i}$, où δ_{z_i} désigne la mesure de Dirac en z_i ; c'est une mesure positive de masse 1. Notons $\mathbf{M}^{\mathrm{ab}}$ l'ensemble des mesures sur C qui sont limites (pour la topologie faible de l'espace des mesures, cf. § 1.1) d'une suite de μ_A, avec $A \in \mathcal{A}$. Quelles sont les propriétés des mesures $\mu \in \mathbf{M}^{\mathrm{ab}}$, et en particulier quels peuvent être leurs supports ?

Nous répondrons partiellement à cette dernière question, en montrant que *le support d'une mesure de* $\mathbf{M}^{\mathrm{ab}}$ *est, soit fini, soit de capacité* $\geqslant q^{1/4}$, la borne $q^{1/4}$ étant optimale. Nous donnerons aussi des exemples où le support de la mesure est *un ensemble totalement discontinu analogue à l'ensemble triadique de Cantor*. La situation est donc très différente de celle où l'on se limite à des jacobiennes de courbes algébriques : dans ce cas, Tsfasman et Vlăduţ ont montré (cf. [**37**] et [**29**]) que l'on n'obtient essentiellement que des mesures à support égal au cercle C, qui ont une densité continue ne s'annulant qu'en un nombre fini de points.

Le texte est formé de deux §§ suivis de deux appendices.

Le § 1 contient les démonstrations des énoncés ci-dessus. Il donne d'abord (§ 1.2) des théorèmes de structure sur les éléments de $\mathbf{M}^{\mathrm{ab}}$, dans le cadre plus général des entiers algébriques qui sont « totalement » dans un compact fixé de $\mathbf{C}$ (pas nécessairement un cercle). Les démonstrations (§ 1.4) reposent sur la positivité de certaines intégrales du type $\int \log|Q(x)|\mu(x)$, où Q est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Ceci fait, il n'y a plus qu'à appliquer un théorème de Robinson ([**25**]) pour obtenir les énoncés indiqués plus haut (§ 1.8).

La plupart des résultats de cette section avaient été obtenus il y a une vingtaine d'années. Je les avais exposés à diverses occasions, mais je n'en avais jamais publié les démonstrations. Le présent séminaire me donne l'occasion de combler cette lacune. J'ai appris tout récemment que M. Tsfasman venait de rédiger un texte ([**36**]) qui couvre une partie des §§ 1.1 à 1.4.

Le § 2 est consacré à la démonstration du théorème de Robinson, une démonstration très intéressante par les différents arguments qu'elle met en jeu : courbes hyperelliptiques, équation de Pell-Abel et polynômes de Chebyshev.

Le premier appendice (appendice A) rassemble quelques définitions et théorèmes standard sur les capacités, tirés principalement des ouvrages de Tsuji [**38**] et Ransford [**22**]. L'appendice B, rédigé par J. Oesterlé, le complète en faisant le lien avec la théorie du potentiel.

Je remercie J-F. Mestre et A. Bogatyrëv pour l'aide qu'ils m'ont apportée au sujet du § 2. Je remercie aussi J. Oesterlé pour sa lecture attentive du manuscrit et ses nombreuses suggestions et corrections.

1. MESURES ASSOCIÉES AUX ENTIERS ALGÉBRIQUES

1.1. Mesures

Les mesures considérées ici sont des mesures de Radon positives sur un espace compact métrisable K, au sens de [**8**, chap. III] [(1)]. En d'autres termes, ce sont les $\mathbf{R}$-formes linéaires $f \mapsto \mu(f)$ sur l'espace $C(K)$ des fonctions continues réelles f sur K

(1) Le mode d'exposition de [**8**] a été beaucoup critiqué, aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de Bourbaki, notamment parce qu'il mêle deux structures différentes : topologie et intégration. Il a cependant l'avantage de bien s'appliquer aux problèmes d'équipartition dont il est question ici, car

telles que :

(1.1.1) $$f \geqslant 0 \text{ sur } K \;\Rightarrow\; \mu(f) \geqslant 0.$$

On écrit souvent $\int_K f(x)\mu(x)$ ou $\int_K f\mu$, à la place de $\mu(f)$.

La *masse* d'une mesure μ est $\mu(1)$. La *mesure de Dirac* en un point z de K est notée δ_z ; on a $\delta_z(f) = f(z)$.

Nous aurons besoin plus loin d'intégrer des fonctions semi-continues supérieurement F sur K à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$. Par définition (cf. [**8**, chap. IV, § 1], appliqué à $-F$ pour transformer « supérieurement » en « inférieurement ») cette intégrale est l'élément de $\mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ donné par :

(1.1.2) $$\int_K F\mu = \inf_{f \geqslant F} \int_K f\mu,$$

où la borne inférieure porte sur les $f \in C(K)$ qui majorent F.

Par exemple, si F est la fonction caractéristique d'une partie fermée T de K, le nombre $\int_K F\mu$ est la mesure $\mu(T)$ de T pour μ. Quand $T = \{z\}$ est réduit à un point z, on écrit $\mu(z)$ à la place de $\mu(\{z\})$; c'est la *masse de* μ *en* z. Lorsque tous les points sont de masse nulle, on dit que μ est *diffuse* (« atomless »), cf. [**8**, V.5.10].

Dans ce qui suit, nous munirons l'espace des mesures de la *topologie faible* (également appelée *topologie vague*, [**8**, chap. III, § 1.9]) ; c'est celle de la convergence simple : une suite (μ_n) de mesures tend vers une mesure μ si $\mu_n(f) \to \mu(f)$ pour tout $f \in C(K)$. Si F est comme ci-dessus, $\int_K F\mu$ est une fonction semi-continue supérieurement de μ (puisque c'est une borne inférieure de fonctions continues), autrement dit, on a :

(1.1.3) $$\int_K F\mu \geqslant \limsup \int_K F\mu_n \quad \text{si } \lim \mu_n = \mu.$$

En particulier :

(1.1.4) $$\int_K F\mu_n \geqslant 0 \quad \text{pour tout } n \;\Rightarrow\; \int_K F\mu \geqslant 0.$$

L'espace des mesures positives de masse 1 est compact pour la topologie faible, et métrisable, car c'est une partie fermée de la boule unité du dual de l'espace de Banach $C(K)$, qui est de type dénombrable, cf. [**8**, III.1, cor. 3 à la prop. 15].

ces questions relèvent à la fois de la topologie et de l'intégration. Le lecteur que cette controverse intéresse pourra consulter l'introduction de [**16**].

1.2. Entiers algébriques et mesures associées

À partir de maintenant, K est une partie compacte de $\mathbf{C}$. On va s'intéresser aux entiers algébriques $z \in \mathbf{C}$ dont tous les $\mathbf{Q}$-conjugués appartiennent à K, ce que l'on exprime en disant que z est « *totalement dans* K ».

De façon plus précise, notons Pol_K l'ensemble des polynômes unitaires de degré > 0, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, dont toutes les racines appartiennent à K. Si P est un tel polynôme, de degré d et de racines $z_1, \ldots, z_d$, on lui associe la mesure δ_P sur K définie par :

$$\delta_P = \frac{1}{d}(\delta_{z_1} + \cdots + \delta_{z_d}), \tag{1.2.1}$$

i.e. $\delta_P(f) = \frac{1}{d}\sum f(z_i)$ pour tout $f \in C(K)$.

Notons $\mathbf{M}$ (ou $\mathbf{M}_K$ lorsque l'on veut préciser K) l'adhérence pour la topologie faible de la famille des mesures δ_P, où P parcourt Pol_K.

C'est la structure de $\mathbf{M}$ qui nous intéresse. On a tout d'abord :

PROPOSITION 1.2.2. — *L'espace* $\mathbf{M}$ *est convexe et compact.*

La compacité résulte de ce que $\mathbf{M}$ est une partie fermée de l'espace des mesures de masse 1 sur K, qui est compact. Pour la convexité, on observe que, si $P_1, \ldots, P_m$ appartiennent à Pol_K, il en est de même de leurs produits $P_1^{a_1} \cdots P_m^{a_m}$ avec $a_i \in \mathbf{N}$, et les δ_P correspondants sont denses dans le simplexe de sommets les δ_{P_i}.

COROLLAIRE 1.2.3. — *L'espace* $\mathbf{M}$ *est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des* δ_P.

Notons Irr_K le sous-ensemble de Pol_K formé des polynômes irréductibles, et soit I_K l'ensemble des δ_P, $P \in \mathrm{Irr}_K$. Les éléments de I_K sont linéairement indépendants, et leur enveloppe convexe fermée est $\mathbf{M}$. Lorsque Irr_K est fini, cela donne la structure de $\mathbf{M}$: c'est le simplexe dont l'ensemble des sommets est I_K.

Supposons Irr_K infini. C'est un ensemble dénombrable. Numérotons ses éléments : $P_1, P_2, \ldots$ Pour tout $n \geqslant 1$, soit $\mathbf{M}_n$ l'enveloppe convexe fermée des $\delta_{P_i}, i \geqslant n$. On a :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \supset \mathbf{M}_2 \supset \cdots \tag{1.2.4}$$

Posons :

$$\mathbf{M}_\infty = \bigcap_{n \geqslant 1} \mathbf{M}_n. \tag{1.2.5}$$

C'est un convexe compact non vide ; il ne dépend pas de la numérotation des éléments de Irr_K.

Théorème 1.2.6. — *Soit* $\mu \in \mathbf{M}_\infty$, *et soit* $S = \operatorname{Supp}\mu$ *son support. Alors :*

(1.2.7) μ *est diffuse* (cf. § 1.1).

(1.2.8) *La capacité* $\operatorname{cap}(S)$ *de* S *est* $\geqslant 1$; *si elle est égale à* 1, *alors* μ *est la mesure d'équilibre de* S.

(1.2.9) *L'ensemble* S *est réduit au sens de A.4.7.*

(Pour tout ce qui concerne les capacités et les mesures d'équilibre, voir les deux appendices ; les références correspondantes commencent par les lettres A et B.)

Corollaire 1.2.10 (Fekete-Szegő [**15**]). — *Si* $\operatorname{cap}(K) < 1$, *alors* Irr_K *est fini.*

La démonstration du th. 1.2.6 sera donnée au § 1.4.4.

La structure de $\mathbf{M}$ se ramène à celle de $\mathbf{M}_\infty$ par le théorème suivant :

Théorème 1.2.11. — *Soit* $\mu \in \mathbf{M}$. *Il existe une suite et une seule de nombres réels positifs* $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *tels que* $\sum_{i \geqslant 0} c_i = 1$, *et que :*

(1.2.12) $\mu = \sum_{i \geqslant 1} c_i \delta_{P_i} + \nu$, *avec* $\nu \in c_0 \mathbf{M}_\infty$.

Rappelons que $P_1, P_2, \ldots$ sont les différents éléments de Irr_K, numérotés dans un ordre arbitraire.

La démonstration sera donnée au § 1.4.5.

Corollaire 1.2.13. — *Si* $\mu \in \mathbf{M}$ *n'est pas combinaison linéaire d'un nombre fini de* δ_{P_i}, *la capacité de* $\operatorname{Supp}\mu$ *est* $\geqslant 1$.

Si $\nu \neq 0$, cela résulte de (1.2.8) appliqué à $c_0^{-1}\nu$. Si $\nu = 0$, il y a une infinité de c_i qui sont non nuls, et $\operatorname{Supp}\mu$ contient les zéros des P_i correspondants ; d'après (1.2.10) appliqué à $\operatorname{Supp}\mu$, on a $\operatorname{cap}(\operatorname{Supp}\mu) \geqslant 1$.

Remarque. — La somme infinie

$$\mu_{\mathrm{at}} = \sum_{i \geqslant 1} c_i \delta_{P_i} \tag{1.2.14}$$

est une mesure *atomique* ([**8**, III.1.3]). La formule $\mu = \mu_{\mathrm{at}} + \nu$ donne la décomposition canonique de μ en partie atomique et partie diffuse, cf. [**8**, V.5.10, prop. 15]. Les th. 1.2.6 et 1.2.11 entraînent :

Théorème 1.2.15. — *Soit* $\mu \in \mathbf{M}$.

(i) $\mu \in \mathbf{M}_\infty \iff \mu$ *est diffuse.*

(ii) *La masse* $\mu(z)$ *de* μ *en un point* $z \in K$ *est* 0 *si* z *n'est pas un entier algébrique totalement dans* K.

(iii) *Si* $z, z' \in K$ *sont deux entiers algébriques conjugués, on a* $\mu(z) = \mu(z')$.