Séminaire BOURBAKI Juin 2018
70[e] année, 2017–2018, n° 1147, p. 427 à 476
doi:10.24033/ast.1091

CONDITIONS DE STABILITÉ ET GÉOMÉTRIE BIRATIONNELLE
[d'après Bridgeland, Bayer-Macrì,...]

par **François CHARLES**

INTRODUCTION

L'objet principal de ce texte est la notion de condition de stabilité sur une catégorie triangulée $\mathscr{D}$. Inspiré par des travaux de physique théorique, Bridgeland a introduit cette notion dans [**16**]. Un des aspects particulièrement frappants de celle-ci est le fait que l'ensemble des conditions de stabilité sur $\mathscr{D}$ — supposées se factoriser par un groupe de type fini — est une variété différentielle $\mathrm{Stab}(\mathscr{D})$ de dimension finie, étale sur un espace vectoriel complexe. L'espace $\mathscr{D}$ est muni de structures de décomposition en chambres et murs associées à certains paramètres.

Un cas particulier important est celui où la catégorie $\mathscr{D}$ est la catégorie dérivée $D^b(X)$ de la catégorie des faisceaux cohérents sur une variété X projective lisse sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas, la notion de condition de stabilité étend, au moins si X est une surface, celle de condition de stabilité à la Gieseker, et la décomposition en chambres et murs étend de telles décompositions venant de la théorie des variations de quotient GIT.

Dans le cas où X est une surface K3, Bayer-Macrì dans [**10, 9**] relient la décomposition d'une composante de $\mathrm{Stab}(X)$ à la décomposition de certains cônes de diviseurs dans des espaces de modules M de faisceaux sur X, qui sont des variétés symplectiques holomorphes. Ils montrent, en un sens précis, que le programme du modèle minimal sur un tel M est induit par des phénomènes de wall-crossing sur $\mathrm{Stab}(X)$. Le but de ce travail est d'exposer ces développements.

Nous avons dû laisser de côté plusieurs applications importantes des conditions de stabilité à la géométrie algébrique. Nous ne mentionnerons donc pas le lien avec

(*) La rédaction de ce texte a bénéficié d'un financement du Conseil Européen de la Recherche (ERC) dans le cadre du Programme Horizon 2020 (projet 715747).

© Astérisque 414, SMF 2019

la symétrie miroir ou la géométrie énumérative. Nous n'évoquerons pas non plus les récents développements autour de la construction de conditions de stabilité en dimension 3 et des inégalités de Bogomolov en dimension supérieure. Nous renvoyons aux beaux textes de survol [**18, 26, 37, 23**] pour des compléments sur cet exposé.

Les deux premières sections de ce texte sont consacrées à un exposé des résultats de Bridgeland [**16**], revus par Kontsevich-Soibelman [**30**] sur les conditions de stabilité sur une catégorie triangulée arbitraire. Nous adaptons des simplifications de Bayer [**5**]. Dans la section 3, nous donnons des exemples de condition de stabilité sur les courbes et les surfaces, d'après notamment [**3**], et décrivons d'après [**17**] une composante de l'espace des conditions de stabilité sur une surface K3, simplifiant là encore la preuve en adaptant [**5**]. Les sections 4 et 5 sont consacrées aux travaux de Bayer-Macrì [**10, 9**].

Remerciements. — Je remercie chaleureusement Arend Bayer, Tom Bridgeland et Daniel Huybrechts pour leurs commentaires précieux sur une première version de ce texte, ainsi qu'Antoine Chambert-Loir pour ses nombreuses remarques, et Viviane Le Dret pour sa relecture attentive.

1. CONDITIONS DE STABILITÉ DANS UNE CATÉGORIE TRIANGULÉE

Dans cette section, nous introduisons la définition, due à Bridgeland [**16**], de condition de stabilité sur une catégorie triangulée arbitraire. La question de la construction de conditions de stabilité sera abordée plus bas dans le texte, nous nous contentons ici de considérations abstraites.

1.1. Stabilité sur une catégorie abélienne

Fixons dans ce qui suit une catégorie abélienne $\mathscr{A}$. On notera comme d'habitude $K_0(\mathscr{A})$ le groupe de Grothendieck de $\mathscr{A}$.

DÉFINITION 1.1. — *Une fonction de stabilité sur $\mathscr{A}$ est un morphisme de groupes additifs*

$$Z : K_0(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$$

tel que pour tout objet non nul A de $\mathscr{A}$, $Z(A)$ appartienne à la réunion du demi-plan de Poincaré et de la demi-droite réelle strictement négative $\mathbb{R}^*_-$.

Étant donnée une telle fonction de stabilité Z, on notera souvent

$$Z(X) = -d(X) + i\,r(X),$$

où $d(X)$ et $r(X)$ sont des nombres réels, appelés respectivement le *degré* et le *rang généralisés* de l'élément X de $K_0(\mathscr{A})$. La *pente généralisée* de X est le réel $\frac{d(X)}{r(X)}$, défini si $r(X)$ est non nul.

La pente généralisée n'étant pas toujours bien définie, il est plus agréable de travailler avec la phase. Cela nous permet de définir les objets stables et semistables.

DÉFINITION 1.2. — *Soit Z une fonction de stabilité sur $\mathscr{A}$. Si X est un élément non nul de $K_0(\mathscr{A})$, la phase de X, notée $\phi(X)$, est l'unique réel $\phi \in]0,1]$ tel que*

$$Z(X) \in \mathbb{R}_+^* e^{i\pi\phi}.$$

DÉFINITION 1.3. — *Soit Z une fonction de stabilité sur $\mathscr{A}$, et soit A un objet non nul de $\mathscr{A}$. On dit que A est stable (resp. semistable) si pour tout sous-objet strict non nul B de A, on a*

$$\phi(B) < \phi(A)$$

(resp. $\phi(B) \leq \phi(A)$).

Si $0 \to B \to A \to C \to 0$ est une suite exacte d'objets non nuls de $\mathscr{A}$, on a $Z(A) = Z(B) + Z(C)$. Les trois nombres complexes $Z(A), Z(B)$ et $Z(C)$ étant tous trois des éléments de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}_-^*$, on a

$$\phi(B) \leq \phi(A) \iff \phi(C) \geq \phi(A)$$

et

$$\phi(B) \geq \phi(A) \iff \phi(C) \leq \phi(A).$$

En particulier, un objet A de $\mathscr{A}$ est (semi)stable si et seulement si pour tout quotient strict non nul C de A, on a $\phi(C) > \phi(A)$ (resp. $\phi(C) \geq \phi(A)$).

Les définitions ci-dessus sont habituelles si $\mathscr{A}$ est la catégorie des faisceaux cohérents sur une courbe intègre projective et lisse sur un corps. Dans ce cas, les fonctions d et r qui à un faisceau cohérent associent respectivement son degré et son rang au point générique s'étendent en des morphismes de groupes $d, r : K_0(\mathscr{A}) \to \mathbb{R}$, d'où une fonction de stabilité $Z = -d + i\,r$. La définition 1.3 étend aux faisceaux cohérents arbitraires la notion de (semi)stabilité exprimée d'habitude en fonction des pentes **[28]**, de telle sorte que les faisceaux de torsion sont tous semistables de pente 1.

Les notions de pente, phase, stabilité, etc. définies ci-dessus dépendent de la fonction de stabilité Z — autant que possible, nous garderons implicite cette dépendance.

Nous pouvons maintenant définir la notion de précondition de stabilité.

Définition 1.4. — *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne, et soit $Z : K_0(\mathscr{A}) \to \mathbb{C}$ une fonction de stabilité. On dit que le couple $(\mathscr{A}, Z)$ est une précondition de stabilité abélienne si tout objet non nul A de $\mathscr{A}$ admet une filtration finie*

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

telle que

- *pour tout $i \geq 0$, A_{i+1}/A_i est semistable ;*
- *pour tout $i \geq 0$, $\phi(A_{i+1}/A_i) > \phi(A_{i+2}/A_{i+1})$.*

L'unicité de la filtration qui apparaît dans la définition ci-dessus est garantie par le lemme élémentaire suivant — nous appellerons donc cette filtration la *filtration de Harder-Narasimhan* de A.

Lemme 1.5. — *Soit Z une fonction de stabilité sur $\mathscr{A}$, et soient A et B deux objets semistables de $\mathscr{A}$. Si $\phi(A) > \phi(B)$, alors il n'existe pas de morphisme non nul de A vers B.*

Démonstration. — Soient A et B comme dans l'énoncé, et soit f un morphisme non nul de A vers B. Soit C l'image de f. Puisque C est un quotient de A, qui est semistable, on a $\phi(A) \leq \phi(C)$. Comme C est un sous-objet de B, on a de même $\phi(C) \leq \phi(B)$, d'où une contradiction. □

1.2. Stabilité dans une catégorie triangulée

Dans la suite de ce texte, on étudiera les familles de conditions de stabilité. Un des points clés de la théorie est le fait que, dans la plupart des cas, on souhaitera non seulement déformer la fonction de stabilité Z, mais aussi la catégorie abélienne $\mathscr{A}$ à l'intérieur de la catégorie triangulée $D^b(\mathscr{A})$. Pour ce faire, il est plus commode de travailler avec des préconditions de stabilité sur une catégorie triangulée.

Soit $(\mathscr{A}, Z)$ une condition de stabilité sur une catégorie abélienne, et considérons la catégorie triangulée $\mathscr{D} = D^b(\mathscr{A})$. Si ϕ est un réel dans $]0, 1]$, soit $\mathscr{P}(\phi)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ dont les objets sont les objets de $\mathscr{A}$ semistables de phase ϕ. Si ϕ est un réel arbitraire de la forme

$$\phi = n + \phi_0,$$

avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 < \phi_0 \leq 1$, soit $\mathscr{P}(\phi)$ la sous-catégorie $\mathscr{P}(\phi_0)[n]$ de $\mathscr{D}$. Les $\mathscr{P}(\phi)$ sont des catégories additives. Les propriétés qu'elles vérifient justifient la définition suivante.

Définition 1.6. — *Soit $\mathscr{D}$ une catégorie triangulée. Un découpage de $\mathscr{D}$ est la donnée, pour tout nombre réel ϕ, d'une sous-catégorie additive pleine $\mathscr{P}(\phi)$ de $\mathscr{D}$, de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1. *Pour tout* $\phi \in \mathbb{R}$, $\mathscr{P}(\phi+1) = \mathscr{P}(\phi)[1]$ *;*
2. *Soient* ϕ_1 *et* ϕ_2 *deux réels, et soit* A_i *un objet de* $\mathscr{P}(\phi_i)$, $i = 1, 2$. *Si* $\phi_1 > \phi_2$, *alors* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A_1, A_2) = 0$ *;*
3. *Soit* A *un objet de* $\mathscr{D}$. *Il existe des réels* $\phi_1 > \cdots > \phi_n$, *des objets* $A_0 = 0, \ldots, A_n = A$ *de* $\mathscr{D}$, *et des triangles distingués*

$$A_i \to A_{i+1} \to E_i \to A_i[1],$$

où E_i *est un objet non nul de* $\mathscr{P}(\phi_i)$.

Remarque 1.7. — Si A est un objet de $\mathscr{D}$ isomorphe à un objet de $\mathscr{P}(\phi)$, alors A est un objet de $\mathscr{P}(\phi)$: les catégories $\mathscr{P}(\phi)$ sont strictement pleines — utiliser la condition 3 pour A et le lemme 1.8 ci-dessous.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si $(\mathscr{A}, Z)$ est une précondition de stabilité sur une catégorie abélienne, alors la construction ci-dessus munit $D^b(\mathscr{A})$ d'un découpage naturel. La première propriété est satisfaite par construction, la seconde grâce au lemme 1.5, et la troisième grâce à l'existence des filtrations de Harder-Narasimhan.

Soit $\mathscr{P}$ un découpage d'une catégorie triangulée $\mathscr{D}$. Comme dans le cas des filtrations de Harder-Narasimhan, on vérifie que la condition 2 ci-dessus garantit l'unicité à isomorphisme près des triangles apparaissant dans 3. En particulier, les phases $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ associées à un objet A de $\mathscr{D}$ comme dans 3 sont bien définies. On notera

$$\phi^+(A) = \phi_0, \phi^-(A) = \phi_{n-1}.$$

Remarquons que l'on a $\phi^+(A) = \phi^-(A)$ si et seulement si A est un objet de $\mathscr{P}(\phi)$ pour $\phi = \phi^+(A) = \phi^-(A)$.

La notion de découpage est étroitement reliée à celle de t-structure, expliquons en quel sens. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $\mathscr{P}(I)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{D}$ dont les objets sont les A tels que $\phi^-(A)$ et $\phi^+(A)$ sont dans I. Autrement dit, $\mathscr{P}(I)$ est la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathscr{D}$ contenant les $\mathscr{P}(\phi)$, $\phi \in I$ et stable par extensions. On note $\mathscr{P}(\geq \phi)$ (resp. $\mathscr{P}(\leq \phi), \mathscr{P}(> \phi), \mathscr{P}(< \phi)$) pour la catégorie $\mathscr{P}([\phi, \infty[)$ (resp. $\mathscr{P}(]-\infty, \phi]), \mathscr{P}(]\phi, \infty[), \mathscr{P}(]-\infty, \phi[)$).

La condition 2 de la définition a pour conséquence immédiate la propriété suivante d'orthogonalité pour les catégories $\mathscr{P}(I)$.

LEMME 1.8. — *Soient* A_1 *et* A_2 *deux objets de* $\mathscr{D}$. *Si* $\phi^-(A_1) > \phi^+(A_2)$, *alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(A_1, A_2) = 0.$$