Séminaire BOURBAKI Juin 2018
70^{e} année, 2017–2018, n° 1149, p. 505 à 532
doi:10.24033/ast.1093

APPLICATIONS HARMONIQUES EN COURBURE NÉGATIVE
[d'après Benoist, Hulin, Lemm, Markovic,...]

par **François GUÉRITAUD**

1. INTRODUCTION

Le théorème suivant est le résultat principal de [**6**].

THÉORÈME 1.1. — *Soient X et Y des variétés de Hadamard dont toutes les courbures sectionnelles appartiennent à $[-b^2, -a^2]$, où $0 < a < b$, et soit une fonction $f : X \to Y$. S'il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in X$ on ait les implications*

$$d_X(x,x') \leq \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) \leq \tfrac{1}{\delta}$$
$$d_X(x,x') \geq \tfrac{1}{\delta} \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x')) \geq \delta,$$

alors il existe une unique application harmonique $h : X \to Y$ à distance bornée de f, i.e. telle que $\sup_{x\in X} d_Y(f(x), h(x))$ soit fini. Cette quantité peut être bornée en fonction de a, b, δ et de $k = \dim X$ et $\ell = \dim Y$.

Une *variété de Hadamard* X est une variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension $k \geq 2$ finie et à courbure sectionnelle ≤ 0. Une telle variété X est homéomorphe à $\mathbb{R}^k$, un homéomorphisme (faiblement dilatant) étant donné par l'application exponentielle $\exp_o : T_oX \to X$, où $o \in X$ est un point base. La contrainte sur les courbures contenue dans l'énoncé est parfois appelée un *pincement* (strictement négatif) ; dans cet exposé on dira aussi que X et Y sont $(-b^2, -a^2)$-pincées, ou simplement *pincées* lorsqu'il existe de tels $b > a > 0$. Bien sûr d_X est la fonction distance géodésique sur X.

Une application f vérifiant l'hypothèse métrique de l'énoncé sera appelée un *plongement faible* (ou parfois : δ-faible). Cette classe comprend par exemple les *plongements quasi-isométriques* (q.i. en abrégé), c'est-à-dire les applications

$f : X \to Y$ telles qu'il existe $c \geq 1$ et $C \geq 0$ vérifiant pour tous $x, x' \in X$:

$$\frac{1}{c}\, d_X(x,x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq c\, d_X(x,x') + C. \tag{1.1}$$

COROLLAIRE 1.2. — *Tout plongement q.i. entre variétés de Hadamard pincées est à distance finie d'une unique application harmonique.* □

Une application est dite *harmonique* si elle minimise localement l'énergie calculée en intégrant la norme L^2 de la différentielle ; nous reviendrons sur cette notion dans les rappels de la partie 3.

2. HISTOIRE ET CONTEXTE

Eells et Sampson ont montré dans **[9]** que toute application lisse entre variétés riemanniennes *compactes* à courbure négative est homotope à une application harmonique ; leur argument consistait à déformer l'application selon le *flot de la chaleur*. Le théorème 1.1 remplace l'hypothèse de (co)-compacité par une hypothèse de plongement faible. Notons au passage que l'application h qu'il produit n'est pas toujours injective, même dans le cas d'un plongement q.i. avec une action cocompacte **[11]**.

C'est avant tout le corollaire 1.2 qui a aiguillonné la curiosité des géomètres : il a été montré un peu avant le théorème 1.1. Les hypothèses de ce dernier peuvent sembler considérablement plus faibles ; cependant nous verrons à la partie 4 que la courbure strictement négative oblige les plongements faibles à suivre statistiquement, aux grandes échelles et dans la plupart des directions, un comportement très voisin des plongements quasi-isométriques. C'est en fait sous une telle condition statistique (résistant aux perturbations bornées, au contraire du plongement faible proprement dit) que nous établirons la conclusion : voir le théorème 5.1.

Régularité au bord

La question à laquelle répond le corollaire 1.2 émergea d'abord dans le contexte des applications quasi-conformes φ du bord d'un espace symétrique de rang un dans lui-même. Bien que leur incidence sur les résultats présentés ici ne soit qu'historique, attardons-nous brièvement sur ces questions de régularité au bord.

Une variété de Hadamard pincée X est en particulier un espace Gromov-hyperbolique, et admet donc un bord idéal $\partial_\infty X$. Ce bord est une sphère topologique, munie d'une classe naturelle de métriques (mutuellement Hölder-équivalentes, et même lipschitziennes) dont on peut fixer une représentante. Pour Y une autre variété de Hadamard pincée, et $\varphi : \partial_\infty X \to \partial_\infty Y$ continue, notons

$$Q^r_\varphi(\xi) := \max_{d(\xi',\xi)\leq r} d\left(\varphi(\xi'),\varphi(\xi)\right) \quad \text{et} \quad q^r_\varphi(\xi) := \min_{d(\xi',\xi)\geq r} d\left(\varphi(\xi'),\varphi(\xi)\right)$$

où $\xi \in \partial_\infty X$ et $r > 0$. Considérons alors les propriétés suivantes :

(i) φ est *quasi-symétrique* : pour tous $0 < r < R$, le rapport $\frac{Q^R_\varphi(\xi)}{q^r_\varphi(\xi)}$ est majoré par une fonction continue de $\frac{R}{r}$ indépendante de ξ ;
(ii) φ est *quasi-conforme* : $\sup_{\xi\in\partial_\infty X} \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{Q^r_\varphi(\xi)}{q^r_\varphi(\xi)} < \infty$;
(iii) φ prolonge continûment un plongement quasi-isométrique $X \xrightarrow{f} Y$;
(iv) on a (iii) et $f : X \to Y$ peut de plus être choisie harmonique.

Les notions (i) et (ii) ne dépendent pas des métriques représentantes choisies sur $\partial_\infty X$ et $\partial_\infty Y$. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente.

Pour X, Y des espaces symétriques réels de rang un, la réciproque est vraie ([**30**], voir aussi [**14**]) : (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Le cas général reste ouvert.

Les propriétés (iii) et (iv) sont en fait équivalentes à (i). L'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) est un résultat classique de Gromov [**12**, §7], préexistant dans [**27**]. La réciproque (i) $\Rightarrow$ (iii), plus difficile, est due à Bonk et Schramm [**7**]. (Quand $X = Y$ est un espace symétrique de rang un, elle remonte à un argument de Tukia [**36**] ; Paulin [**31**] en donnait une version pour les graphes de Cayley de groupes hyperboliques). L'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv), dont la réciproque est triviale, équivaut à la partie « existence » du corollaire 1.2.

Genèse du problème

Schoen conjecturait dans [**33**] que *toute application quasi-symétrique du cercle* $\partial_\infty\mathbb{H}^2$ *dans lui-même étend un unique difféomorphisme quasi-conforme harmonique de* $\mathbb{H}^2$. Dans [**22**], Li et Wang observaient qu'on obtient une conjecture équivalente en remplaçant « difféomorphisme quasi-conforme » par « quasi-isométrie » (toujours harmonique), et étendaient conjecturalement ce nouvel énoncé à tout espace symétrique(1) de rang réel 1. Ils montraient en outre l'unicité de l'extension harmonique quasi-isométrique (si elle existe), d'après un argument de Li et Tam [**21**] que nous reprendrons à la partie 6. Sans hypothèse de quasi-isométrie,

(1) Tous les espaces symétriques rencontrés dans cet exposé seront implicitement supposés de type non compact.

pas d'unicité (2) : l'identité du demi-plan $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ et l'application harmonique $x + \mathbf{i}y \mapsto x + \mathbf{i}\sinh(y)$ ont le même prolongement continu à $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.

L'implication (i) $\Rightarrow$ (iii) étant connue, la conjecture de Schoen se ramenait donc à montrer (iii) $\Rightarrow$ (iv) pour $X = Y = \mathbb{H}^2$. Par ailleurs, Pansu montrait dès [**30**] que l'extension (existe et) est isométrique dès que $X = Y$ est un espace hyperbolique quaternionique ou octonionique.

Progrès récents

La conjecture de Schoen a été finalement montrée par Markovic dans [**25**]. Il avait auparavant résolu dans [**24**] le cas de $\mathbb{H}^3$, plus favorable en ce qu'il respecte le principe de rigidité de Mostow : toute application quasi-conforme du bord $\partial_\infty \mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{S}^2$ dans lui-même est différentiable presque partout. Le cas de $\mathbb{H}^n$ (pour $n \geq 3$) est traité dans [**20**], et le cas où X, Y sont des espaces symétriques de rang 1 quelconques (éventuellement distincts) dans [**4**]. Ce dernier résultat prouve en particulier la conjecture de Li-Wang.

Ces progrès récents, ainsi que le théorème 1.1 (ou son corollaire 1.2) qui les contient tous, peuvent être vus comme des épures géométriques successives d'un même argument d'existence, les ingrédients analytiques étant progressivement absorbés par des principes généraux et classiques. Les difficultés liées à l'anisotropie ou à la courbure variable dans une variété de Hadamard pincée X sont séparément réglées par [**5**], dont le résultat principal (th. 3.6 ci-dessous) permet de comparer les mesures visuelle et harmonique sur une sphère de X, indépendamment de son rayon. Ces inégalités sont un pendant fini de [**17**], où Kifer et Ledrappier donnaient des estimations analogues sur la sphère à l'infini.

La jeune postérité de ces arguments d'existence comprend déjà des prépublications offrant plusieurs directions de généralisation. Dans [**34**], Sidler et Wenger donnent une version du corollaire 1.2 (sans l'unicité, qui peut être mise en défaut) dans laquelle l'espace but Y est un espace Gromov-hyperbolique CAT(0) localement compact. La notion d'application harmonique dans ce contexte est due à Korevaar et Schoen [**19**].

Dans [**29**], Pankka et Souto étendent les arguments de [**4**] pour montrer que toute application *quasi-régulière* $\varphi : \partial_\infty \mathbb{H}^n \to \partial_\infty \mathbb{H}^n$ étend continûment une application harmonique $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$. La quasi-régularité est une généralisation de la quasi-conformité, pour des applications qui ne sont pas nécessairement des homéomorphismes.

(2) Ajoutons : sans hypothèse de plongement faible, pas d'existence dans le théorème 1.1. L'application $x + \mathbf{i}y \mapsto x + \mathbf{i}(y + y^2)$ n'est pas un plongement faible (pour $n \gg 1$ les points $\pm n + \mathbf{i}n^{2/3}$ sont mutuellement lointains mais d'images proches) ; elle n'est à distance finie d'aucune application harmonique [**6**].

Résultats voisins

Le corollaire 1.2 est aussi à rapprocher du lemme de Morse [**26, 12**], correspondant à $X = \mathbb{R}$: *tout plongement q.i. de la droite dans une variété de Hadamard pincée Y est à distance bornée d'une géodésique.* En effet, les applications harmoniques (non constantes) de la droite dans une variété riemannienne sont les géodésiques paramétrées à vitesse uniforme. Dans le lemme de Morse cependant, il peut être nécessaire de reparamétrer la géodésique (i.e. le corollaire 1.2 ne s'étend pas littéralement au cas $X = \mathbb{R}$).

Il est concevable qu'on puisse affaiblir les hypothèses de pincement dans le théorème 1.1 ou son corollaire. Sans elles cependant, le lemme de Morse devient faux, même s'il subsiste sous une forme atténuée pour Y un espace symétrique irréductible de rang supérieur : voir [**16, 13**].

En revanche, si $X = Y$ est un espace symétrique sans facteur de rang 1, alors tout plongement quasi-isométrique $f : X \to X$ est à distance bornée d'une isométrie. Ce résultat est dû à Kleiner-Leeb [**18**] ; voir aussi Eskin-Farb [**10**].

Étendre harmoniquement une fonction *scalaire* φ définie sur le bord d'une variété de Hadamard pincée, c'est possible sans autre hypothèse que la continuité de φ : ce résultat est dû indépendamment à Anderson et Sullivan [**2, 35**]. Pour φ à valeurs dans le bord d'une autre variété de Hadamard, la situation est moins favorable : bien qu'il y ait existence et unicité des extensions harmoniques pour φ lisse, dans [**24**] Markovic exhibe une suite de difféomorphismes du cercle qui convergent uniformément vers l'identité mais dont les extensions harmoniques au disque n'ont pas de limite continue. Une hypothèse plus forte que la continuité est donc bien nécessaire dans la conjecture de Schoen, du moins si l'on veut que le prolongement dépende continûment de la donnée. L'introduction de [**22**] contient de plus amples références.

3. NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout l'exposé, pour X une variété de Hadamard, $x, y, z \in X$ et $r > 0$, on notera :

- $\mathbb{B}_X(x, r)$ ou $\mathbb{B}(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r ;
- $\mathbb{S}_x$ la sphère unité de l'espace euclidien T_xX tangent à X en x ;
- (3.1) $\xi_r := \exp_x(r\xi) \in \partial\mathbb{B}(x, r)$ pour tout $\xi \in \mathbb{S}_x$;
- ${}_x\measuredangle_y^z \in [0, \pi]$ l'angle formé en x (supposé distinct de y et z) par les rayons géodésiques $[xy)$ et $[xz)$.

Pour deux quantités $u, v > 0$, dans le contexte du théorème 1.1, nous utiliserons la notation $u \lesssim v$ pour signifier que $u \leq Mv$ où M dépend des constantes de