Séminaire BOURBAKI Janvier 2019
71$^{\mathrm{e}}$ année, 2018–2019, n$^{\mathrm{o}}$ 1155, p. 173 à 223
doi:10.24033/ast.1134

LA CONJECTURE DES COMPAGNONS
[d'après Deligne, Drinfeld, L. Lafforgue, T. Abe, ...]

par **Anna CADORET**

1. INTRODUCTION

Dans tout l'exposé k désignera un corps fini de caractéristique p et de cardinal q et $\overline{k}$ un clôture algébrique de k ; on notera $\pi_1(k) := \pi_1(\mathrm{Spec}(k), \mathrm{Spec}(\overline{k}))$ le groupe de Galois absolu de k et $\varphi \in \pi_1(k)$ le Frobenius géométrique *i. e.* l'inverse de $a \to a^q$. Une k-variété est un schéma séparé de type fini sur k et une courbe est une k-variété de dimension 1. Si X est une k-variété, on note $|X|$ l'ensemble des points fermés de X. Pour $x \in X$ (non nécessairement fermé), on note $k(x)$ le corps résiduel et si $\overline{x}$ est un point géométrique au-dessus de x, $\pi_1(x) := \pi_1(x, \overline{x})$ le groupe de Galois absolu de $k(x)$; si $x \in |X|$, on note $\varphi_x \in \pi_1(x)$ le Frobenius géométrique.

La lettre ℓ désignera toujours un premier $\neq p$. Soit X une k-variété, normale, $*$ un premier et Q une extension algébrique de $\mathbb{Q}_*$. On utilisera la terminologie (empruntée à Kedlaya) Q-coefficient sur X pour désigner de façon uniforme :

- Si $* \neq p$: un Q-faisceau de Weil lisse ;
- si $* = p$: un Q-F-isocristal surconvergent.

Soit $\mathcal{C}$ un Q-coefficient sur X. La fibre $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ en un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de $x \in |X|$ est un Q-espace vectoriel de dimension finie naturellement muni d'une action du Frobenius φ_x. On notera $\chi_x(\mathcal{C}, T) := \mathrm{dét}(1 - \varphi_x T | \mathcal{C}_x) \in Q[T]$ le polynôme caractéristique inverse ; il ne dépend pas de $\overline{x}$. Le corps des traces $Q_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est la $\mathbb{Q}$-sous-extension de Q engendrée par les coefficients des $\chi_x(\mathcal{C}, T)$, $x \in |X|$. Si $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$ est un isomorphisme, un σ-compagnon de $\mathcal{C}$ est un $\overline{\mathbb{Q}}_{*'}$-coefficient $\mathcal{C}'$ tel que $\sigma\chi_x(\mathcal{C}, T) = \chi_x(\mathcal{C}', T)$, $x \in |X|$. On notera $\mathcal{C} \sim_\sigma \mathcal{C}'$. La conjecture dite « des compagnons », sous une forme un peu simplifiée, est l'énoncé suivant.

CONJECTURE 1.1 (Conjecture des compagnons ; Deligne [**16**, (1.2.10)])

Soit X une k-variété, normale, géométriquement connexe et $\mathcal{C}$ un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient sur X, irréductible et de déterminant fini.

(a) [Pureté] *$\mathcal{C}$ est pur de poids 0 : pour tout isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \mathbb{C}$ et pour tout $x \in |X|$ les racines de $\iota\chi_x(\mathcal{C}, T)$ sont de module 1 ;*

(b) [Finitude] *$Q_{\mathcal{C}}$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$;*

(c) [Compagnons] *Pour tout isomorphisme $\sigma : \overline{\mathbb{Q}}_* \tilde{\to} \overline{\mathbb{Q}}_{*'}$, $\mathcal{C}$ admet un σ-compagnon.*

On verra que, s'il existe, le σ-compagnon est unique à isomorphisme près, irréductible et de déterminant fini.

1.1. Statut

L'énoncé original de la conjecture 1.1 est un peu différent. Deligne demande notamment que les compagnons soient définis sur les complétés d'une même extension finie de $Q_{\mathcal{C}}$ [**16**, (1.2.10) (v)]. La descente du corps des coefficients est traitée au paragraphe 8.2 ; c'est en fait une conséquence « formelle » de la conjecture 1.1. L'autre différence est la partie p-adique de la conjecture. Dans [**16**], Deligne énonce la conjecture pour les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et émet l'espoir qu'il existe « de petits camarades cristallins » [**16**, (1.2.10) (vi)]. C'est Crew [**13**, Conj. 4.13] (cf. aussi [**3**, Conj. (D)]) qui a identifié la catégorie des F-isocristaux surconvergents de Berthelot [**7**] comme candidat potentiel pour l'analogue p-adique de la catégorie des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-faisceaux lisses et a obtenu les premiers résultats à l'appui — notamment le théorème de monodromie globale ; un ingrédient essentiel de la théorie des poids de Deligne (cf. 2.2 ci-dessous).

1.1.1. — Supposons dans ce paragraphe que X est une k-courbe ; notons $k(X)$ son corps des fonctions et $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $k(X)$. Dans ce cas, la conjecture 1.1 est une conséquence de la correspondance de Langlands pour GL_r et $k(X)$. La correspondance ℓ-adique en rang $r = 2$ a été établie par Drinfeld [**22**] à la fin des années 70 et c'est ce résultat qui est sans doute à l'origine de la conjecture 1.1. Deligne avait noté que la preuve de Drinfeld n'établissait pas seulement une correspondance « abstraite » préservant les facteurs L locaux entre faisceaux ℓ-adiques irréductibles de rang 2 sur les ouverts de X et représentations automorphes pour $GL_2(\mathbb{A})$ mais qu'elle exhibait les faisceaux ℓ-adiques en question comme la réalisation de certains motifs découpés dans la cohomologie des champs de Chtoucas. En développant l'approche de Drinfeld, L. Lafforgue [**50**] a démontré la correspondance ℓ-adique en rang r quelconque, établissant ainsi automatiquement la conjecture des compagnons pour les courbes dans ce contexte. La preuve de la version p-adique de la correspondance ([**3**, Conj. (L)]) a été l'un des moteurs de la construction d'un formalisme en cohomologie rigide parallèle à celui de la cohomologie ℓ-adique. Ces développements techniques ont permis à T. Abe [**3**], [**2**] d'établir la version p-adique de la correspondance de Langlands et, partant, de compléter la conjecture des compagnons pour les courbes.

1.1.2. — Lorsque X est de dimension supérieure, il n'y a pas d'analogue — même conjectural — de la correspondance de Langlands mais dans le contexte de la philosophie des motifs (*e. g.* [**28**, §2]) et notamment par analogie avec une conjecture de Simpson pour les systèmes locaux rigides quasi unipotents sur une $\mathbb{C}$-variété lisse ([**68**, Conj. 4], [**52**, Conj. 1.1] si X est projective — cf. 9), on s'attend à ce que les $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients irréductibles de déterminant fini sur une k-variété X lisse de dimension arbitraire soient encore la réalisation de motifs découpés dans la cohomologie de certains champs sur X. Si de tels résultats semblent actuellement hors de portée, la conjecture 1.1 est maintenant en grande partie établie en toute dimension.

Théorème 1.2 (Deligne, Drinfeld, L. Lafforgue, Abe, Abe-Esnault, Kedlaya)

Les énoncés 1.1 (a), (b) *sont établis. L'énoncé 1.1* (c) est établi si X est une courbe ou si $*' \neq p$ et X est lisse.

Pour établir la conjecture 1.1 en dimension supérieure, la stratégie n'est donc pas de chercher à construire une réalisation motivique des $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients mais de se ramener au cas des courbes par des arguments géométriques. L'énoncé 1.1 (a) peut se tester en un seul point et est invariant par extension de corps ; il suffit donc, étant donné un $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficient $\mathcal{C}$ irréductible de déterminant fini, de savoir construire une courbe $C \to X$ (dépendant de $\mathcal{C}$) telle que $\mathcal{C}|_C$ est encore irréductible. C'est essentiellement ainsi que procède Deligne [**19**, Thm. 1.6] (corrigeant un argument de L. Lafforgue) pour $* \neq p$ et Abe-Esnault [**5**, Thm. 2.6], Kedlaya [**46**, Lem. 3.1.3] pour $* = p$. Les énoncés 1.1 (b) et 1.1 (c) sont eux de nature globale et l'existence de telles courbes n'est pas suffisant pour les démontrer. L'énoncé 1.1 (b) pour $* \neq p$ est dû à Deligne [**19**, Thm. 3.1]. Le point-clef est de prouver que si X est une courbe, le corps $Q_{\mathcal{C}}$ est engendré par les coefficients des $\chi_x(\mathcal{C}, T)$ pour $x \in |X|$ de degré résiduel borné seulement en termes de la 'complexité' de $\mathcal{C}$ (un invariant qui ne dépend que de X et de la ramification de $\mathcal{C}$) puis de montrer que sur une k-variété X de dimension arbitraire on peut faire passer en tout point $x \in |X|$ une courbe C^x telle que la complexité de $\mathcal{C}|_{C^x}$ reste suffisamment petite par rapport au degré résiduel de x. L'énoncé 1.1 (c) pour $*' = \ell \neq p$ est dû à Drinfeld [**24**, Thm. 1.1], inspiré par des techniques de Wiesend. L'idée est de considérer l'ensemble $\mathrm{Cu}(X)$ des courbes tracées sur X, d'appliquer 1.1 (c) aux restrictions $\mathcal{C}|_C$, $C \in \mathrm{Cu}(X)$ puis de montrer que les $\sigma(\mathcal{C}|_C)$, $C \in \mathrm{Cu}(X)$ proviennent en fait d'un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-coefficient $\sigma\mathcal{C}$ sur X. L'énoncé sous-jacent est donc un critère (théorème 7.1) caractérisant les familles de faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{C}|_C$, $C \in \mathrm{Cu}(X)$ vérifiant la condition de compatibilité évidente : $\mathcal{C}_C|_{C\times_X C'} \simeq \mathcal{C}_{C'}|_{C\times_X C'}$, $C, C' \in \mathrm{Cu}(X)$ (ce que, en suivant Esnault-Kerz, on appellera un squelette ℓ-adique) qui proviennent d'un faisceau ℓ-adique sur X en fonction de propriétés (finitude du corps des coefficients, et modération) préservées par les compagnons sur les courbes. La preuve de l'énoncé 1.1 (b) s'applique non seulement aux faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{C}$ sur X dont le corps $Q_{\mathcal{C}}$ est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ mais à n'importe quel squelette ℓ-adique $\mathcal{C}_C$, $C \in \mathrm{Cu}(X)$ dont les corps $Q_{\mathcal{C}_C}$ sont des extensions algébriques de $\mathbb{Q}$ et qui sont modérés par une même altération génériquement étale de X. Cette observation permet de montrer la finitude et l'existence de compagnons ℓ-adiques pour les F-isocristaux surconvergents. Comme l'a noté Kedlaya, la preuve de 1.1 (b) peut aussi se transposer telle quelle au cadre p-adique. Il n'en va pas de même de la preuve de 1.1 (c), qui utilise de façon cruciale la description galoisienne (cf. 2.1.3) de la catégorie des faisceaux ℓ-adiques.

1.2. Structure du texte

Le second paragraphe rassemble un certain nombre de notations et de préliminaires utilisés dans la suite. Nous n'avons pas tenté d'expliciter la construction des catégories de $\overline{\mathbb{Q}}_*$-coefficients qui interviennent dans la conjecture des compagnons ; cela nous aurait conduit au-delà des objectifs de l'exposé. Nous avons par contre essayé d'en dégager quelques propriétés essentielles, qui suffisent pour les manipuler. Le troisième paragraphe passe brièvement en revue la correspondance de Langlands pour GL_r. Au quatrième paragraphe, nous introduisons les notions de squelettes et de squelettes géométriques. Le cinquième paragraphe est consacré à la preuve de l'énoncé de finitude 1.1 (b) et les sixième et septième paragraphes à celle de l'existence de compagnons 1.1 (c) pour $*' \neq p$ et X lisse. Au huitième paragraphe, nous déduisons du théorème 1.2 certaines propriétés de descente du corps des coefficients et de $*$-indépendance. Enfin, au dernier paragraphe, nous donnons une application — due à Esnault-Groechenig — de la conjecture 1.1 à la conjecture de Simpson évoquée plus haut.

Au-delà de sa beauté conceptuelle, la conjecture 1.1 fournit un substitut aux théorèmes de comparaison cohomologique, permettant de transférer certaines propriétés entre cohomologies ℓ-adiques et cohomologie rigide. Ces aspects apparaissent un peu à la marge dans l'exposé (cf. notamment la fin du paragraphe 7.1 et le corollaire 8.3) ; pour limiter la longueur du texte, nous ne les avons pas traités systématiquement.

Remerciements

Je remercie Vincent Lafforgue, Javier Fresàn, Hélène Esnault et Marco d'Addezio pour leur relecture et corrections — notamment mathématiques. Je suis reconnaissante à Emiliano Ambrosi et Atsushi Shiho de m'avoir signalé un problème dans une première version de la preuve du corollaire 3.8. Je remercie également les participants

au groupe de travail organisé dans le cadre de l'A.N.R. ECOVA à l'I.H.P. au printemps 2017. C'est grâce à Emiliano Ambrosi, qui n'a pas hésité à s'attaquer aux isocristaux, que j'ai appris à avoir un peu moins peur des aspects p-adiques de la conjecture. La tentative de présenter uniformément les aspects ℓ-adiques et p-adiques doit beaucoup aux textes de Kedlaya [**46**], [**47**] et d'Addezio [**14**].

2. PRÉLIMINAIRES

Soit X une k-variété normale, géométriquement connexe (pour simplifier), de dimension d.

2.1. Q-coefficients

Soit $*$ un nombre premier et Q une extension algébrique de $\mathbb{Q}_*$. Les catégories de Q-coefficients sont des catégories tannakiennes neutres sur Q *i. e.* des $\otimes$-catégories abéliennes rigides Q-linéaires $\mathfrak{C}$ que l'on peut munir de $\otimes$-foncteurs « fibres » $F : \mathfrak{C} \to \mathrm{Vect}_Q$, fidèles, exacts, de cible la $\otimes$-catégorie Vect_Q des Q-espaces vectoriels de dimension finie. À tout foncteur fibre est associé le Q-schéma en groupe affine $G(\mathfrak{C}, F) := \underline{\mathrm{Aut}}^{\otimes}(F)$ des $\otimes$-automorphismes de F — appelé groupe de Tannaka. Le foncteur fibre $F : \mathfrak{C} \to \mathrm{Vect}_Q$ induit une $\otimes$-équivalence de catégories entre Q-coefficients et Q-représentations de dimension finie de $G(\mathfrak{C}, F)$. Si $\mathcal{C}$ est un objet de $\mathfrak{C}$, on peut restreindre les foncteurs fibres à la plus petite sous-catégorie tannakienne $\langle \mathcal{C} \rangle^{\otimes}$ de $\mathfrak{C}$ contenant $\mathcal{C}$; le groupe de Tannaka correspondant $G(\mathcal{C}) := G(\langle \mathcal{C} \rangle^{\otimes}, F)$ est un Q-sous-groupe fermé de $GL(F(\mathcal{C}))$, quotient de $G(\mathfrak{C}, F)$. On renvoie par exemple à [**18**] pour un exposé systématique du formalisme tannakien.

Les groupes de Tannaka dépendent des foncteurs fibres à forme intérieure près ; ceci n'interviendra pas dans l'exposé et on commettra un premier abus de notation en n'indiquant pas les foncteurs fibres.

2.1.1. — Rappelons que l'on a défini la catégorie des Q-coefficients sur X comme :

- Si $* \neq p$: la catégorie des Q-faisceaux de Weil lisses sur X.
- Si $* = p$: la catégorie des Q-F-isocristaux surconvergents sur X.

Après choix d'une clôture algébrique $\overline{k}$ de k, la catégorie des Q-coefficients sur $\mathrm{Spec}(k)$ est équivalente à la catégorie des Q-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action du Frobenius géométrique φ. Si $\mathcal{C}$ est un Q-coefficient sur X et $\overline{x}$ un point géométrique au-dessus de $x \in |X|$ (et si $* = p$, Q contient le corps des fractions des vecteurs de Witt de $k(x)$), la fibre $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{C}$ en $\overline{x}$ est donc un Q-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action de φ_x. Cette action ne dépend du choix de $\overline{x}$ qu'à isomorphisme près, ce qui, là encore n'interviendra pas dans l'exposé