332 ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(999) *Convexes divisibles*

Jean-François QUINT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61e année, 2008-2009, n° 999, p. 45 à 73

CONVEXES DIVISIBLES
[d'après Yves Benoist]

par **Jean-François QUINT**

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous allons nous intéresser à des groupes discrets d'automorphismes projectifs de certains ouverts convexes de l'espace projectif.

De même que l'étude des groupes discrets d'automorphismes de l'espace euclidien peut s'interpréter en termes de pavages euclidiens périodiques, celle des groupes discrets d'automorphismes de convexes peut se comprendre comme celle de pavages projectifs périodiques. Quand l'ouvert convexe auquel on s'intéresse est un ellipsoïde, ces pavages sont des pavages hyperboliques et les situations que nous allons rencontrer peuvent être en grande partie considérées comme des généralisations de celle-ci.

Nous verrons comment la compréhension de ces groupes d'automorphismes fait appel à des théories variées comme les systèmes dynamiques hyperboliques, la théorie géométrique des groupes, les groupes algébriques, les représentations des groupes discrets, l'analyse non-linéaire...

Je remercie chaleureusement Yves Benoist pour sa relecture attentive de ce texte et ses nombreuses remarques et suggestions, ainsi que Frédéric Paulin pour ses corrections de la première version.

1.1. Convexes

Soit C un cône ouvert convexe dans un espace vectoriel réel de dimension finie V. On dit que C est saillant (ou proprement convexe) s'il ne contient pas de droite affine, ce qui revient à dire qu'il existe un hyperplan H de V tel que $\bar{C} - \{0\}$ soit contenu dans une des composantes connexes de $V - H$.

Soit Ω un ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. On dit que Ω est convexe s'il existe un hyperplan H de V tel que $\Omega \cap \mathbb{P}(H) = \varnothing$ et que Ω soit convexe au sens usuel dans l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Si Ω est convexe, on dit qu'il est saillant s'il existe

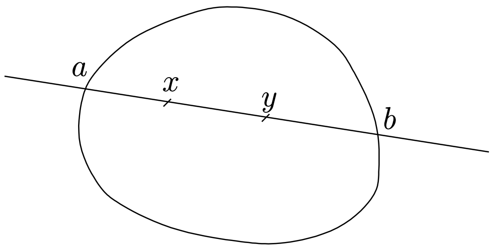

FIGURE 1. Distance de Hilbert

un hyperplan H de V tel que l'adhérence de Ω ne rencontre pas $\mathbb{P}(H)$. L'ouvert Ω est convexe (resp. convexe saillant) si et seulement s'il existe dans V un cône ouvert convexe différent de V (resp. convexe saillant) dont Ω soit la trace projective.

Un cône ouvert convexe peut toujours être vu comme un ouvert convexe de l'espace projectif $\mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})$.

On note $\operatorname{Aut} C$ (resp. $\operatorname{Aut} \Omega$) le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$ (resp. de $\mathrm{PGL}(V)$) constitué des éléments qui stabilisent le cône ouvert convexe C de V (resp. l'ouvert convexe Ω de $\mathbb{P}(V)$).

Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$. On peut définir (voir **[15]**) sur Ω une distance d_Ω invariante par $\operatorname{Aut} \Omega$, appelée distance de Hilbert, de la façon suivante. Si x et y sont deux points distincts de Ω, la droite projective engendrée par x et y intersecte la frontière de Ω en deux points distincts a et b. La distance de Hilbert $d_\Omega(x, y)$ entre x et y est alors la valeur absolue du birapport $[a, b, x, y]$ entre ces quatre points, c'est-à-dire que, pour un choix de paramétrisation projective de cette droite par $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on a

$$d_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{x-b}{x-a} \frac{y-a}{y-b} \right) \right|$$

(voir figure 1). La distance d_Ω est propre, c'est-à-dire que ses boules fermées sont compactes, et elle induit sur Ω la topologie usuelle de Ω. Le groupe $\operatorname{Aut} \Omega$ préserve la distance d_Ω et agit proprement sur Ω (voir lemme 2.11).

On dit qu'un cône ouvert convexe saillant C de V est divisible s'il existe un sous-groupe discret Λ de $\operatorname{Aut} C$ tel que $\Lambda \backslash C$ soit compact. De même, on dit qu'un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(V)$ est divisible s'il existe un sous-groupe discret Γ de $\operatorname{Aut} \Omega$ tel que $\Gamma \backslash \Omega$ soit compact. D'après le lemme de Selberg (voir **[3, 42]**), on peut toujours supposer que Λ et Γ sont sans torsion.

Exemple 1.1. — Soient $d \geq 3$ la dimension de V, q une forme quadratique de signature $(1, d-1)$ sur V et C_q une des deux composantes connexes de l'ensemble $\{x \in V | q(x) > 0\}$. Alors, C_q est un cône convexe saillant, homogène sous l'action d'un sous-groupe d'indice 2 du groupe des similitudes de q. Comme ce groupe admet des sous-groupes discrets co-compacts, le cône C_q est divisible. De même, la trace projective Ω_q de C_q est un ouvert convexe saillant divisible : on l'appelle l'ellipsoïde de q. L'ouvert Ω_q s'identifie à l'espace hyperbolique réel de dimension $d-1$ et la distance de Hilbert est alors égale à la distance hyperbolique. En particulier, si Γ est un sous-groupe discret (sans torsion) de $\operatorname{Aut}\Omega_q$ qui divise Ω_q, l'espace $\Gamma\backslash\Omega_q$ est une variété hyperbolique.

Exemple 1.2. — Le groupe des matrices diagonales à coefficients > 0 agit simplement transitivement sur le cône ouvert convexe saillant $(\mathbb{R}_+^*)^d \subset \mathbb{R}^d$. Si Γ est un groupe discret de telles matrices qui agit co-compactement sur $(\mathbb{R}_+^*)^d \subset \mathbb{R}^d$, le quotient est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^d$.

Exemple 1.3. — Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cône convexe saillant des matrices symétriques définies positives. Les réseaux de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ divisent donc ce cône.

Dans tous ces exemples, les cônes qui apparaissent sont homogènes sous leur groupe d'automorphismes. Nous verrons plus loin qu'il existe de nombreux cônes convexes divisibles non homogènes. Les premiers exemples de tels cônes divisibles non homogènes ont été construits par Kac et Vinberg dans [**29**]. Auparavant, les cônes convexes homogènes avaient été classifiés par Vinberg dans [**46**] et [**47**].

L'étude systématique des convexes divisibles remonte aux travaux de Benzécri [**13**]. En particulier, Benzécri montre qu'un ouvert convexe saillant divisible Ω de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas un triangle, c'est-à-dire qui n'est pas conjugué par un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ à la trace projective de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, est strictement convexe et a un bord de classe $\mathscr{C}^1$. En outre, si la dérivée seconde de $\partial\Omega$ est définie et non nulle en un point, Ω est un ellipsoïde.

Dans [**45**], Vey montre que, si un cône ouvert convexe saillant C de V est divisé par un groupe Γ, la représentation de Γ dans V est semi-simple. Plus précisément, si $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$ est la décomposition de V en Γ-sous-modules irréductibles, il existe des cônes ouverts convexes saillants $C_1 \subset V_1, \ldots, C_l \subset V_l$ tels que $C = C_1 + \ldots + C_l$. Ce résultat implique en particulier que, si Ω est un ouvert convexe saillant d'un espace affine qui est divisé par un groupe de transformations affines, le convexe Ω est un cône. L'étude des ouverts convexes affines divisibles se ramène donc bien à celle des cônes convexes divisibles.

1.2. Structures localement homogènes

La théorie des convexes divisibles est fortement liée à celle des espaces localement homogènes. Rappelons que, si G est un groupe de Lie connexe agissant transitivement sur une variété X, un (G,X)-atlas sur une variété M est un ensemble $\mathcal{F}$ de cartes (U,φ), où U est un ouvert de M et φ un difféomorphisme de U sur un ouvert de X, ayant la propriété que, si (U,φ) et (W,ψ) appartiennent à $\mathcal{F}$, il existe un élément g de G tel que, pour tout x dans $U \cap W$, on ait $\psi(x) = g\varphi(x)$. Une (G,X)-structure sur M consiste en la donnée d'un (G,X)-atlas maximal $\mathcal{F}$ sur M avec $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathcal{F}} U = M$. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont alors appelés cartes compatibles avec la (G,X)-structure. Par définition, les cartes compatibles recouvrent M. Supposons donc M munie d'une telle (G,X)-structure et notons $\pi : \tilde{M} \to M$ un revêtement universel de M et Γ le groupe des automorphismes de ce revêtement. Il existe alors un difféomorphisme local $D : \tilde{M} \to X$ et un homomorphisme de groupes $h : \Gamma \to G$ ayant les propriétés suivantes : *(i)* pour tout ouvert W de $\tilde{M}$ tel que π induise un difféomorphisme de W sur $\pi(W)$ et pour toute carte compatible (U,φ) avec U connexe et $U \subset \pi(W)$, il existe un élément g de G tel que, pour tout x dans W avec $\pi(x) \in U$, on ait $D(x) = g\varphi(\pi(x))$; *(ii)* pour tous x dans $\tilde{M}$ et γ dans Γ, on a $D(\gamma x) = h(\gamma)D(x)$. Si (D',h') est un autre couple satisfaisant aux mêmes propriétés, il existe g dans G tel que, pour tout x dans X, on ait $D'(x) = gD(x)$ et que, pour tout γ dans Γ, on ait $h'(\gamma) = gh(\gamma)g^{-1}$. Par abus de langage, on dit que D est la développante de la (G,X)-structure et h son morphisme d'holonomie. La donnée de D et de h détermine complètement la (G,X)-structure.

Exemple 1.4. — Le groupe $\mathrm{GA}(V)$ des automorphismes affines de V agit transitivement sur V. Soient $C \subset V$ un cône ouvert convexe saillant et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Aut}\, C$. La $(\mathrm{GA}(V),V)$-structure naturelle de C induit une $(\mathrm{GA}(V),V)$-structure sur $\Gamma\backslash C$. Son application développante est l'injection naturelle $C \to V$ et son holonomie l'injection naturelle $\Gamma \to \mathrm{GA}(V)$.

Exemple 1.5. — Le groupe $\mathrm{PGL}(V)$ des automorphismes projectifs de V agit transitivement sur $\mathbb{P}(V)$. Soient $\Omega \subset \mathbb{P}(V)$ un ouvert convexe saillant et Λ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Aut}\,\Omega$. La $(\mathrm{PGL}(V),\mathbb{P}(V))$-structure naturelle de Ω induit une $(\mathrm{PGL}(V),\mathbb{P}(V))$-structure sur $\Lambda\backslash\Omega$. Son application développante est l'injection naturelle $\Omega \to \mathbb{P}(V)$ et son holonomie l'injection naturelle $\Lambda \to \mathrm{PGL}(V)$.

Dans ces exemples, l'application développante est injective. Ce n'est pas toujours le cas comme on peut le voir, par exemple dans [**21**] ou [**44**].

Une $(\mathrm{GA}(V),V)$-structure sera appelée structure affine plate. Une $(\mathrm{PGL}(V),\mathbb{P}(V))$-structure sera appelée structure projective plate. Supposons M munie d'une structure projective (resp. affine) plate. On appelle alors géodésiques de M les courbes tracées sur M dont les composantes connexes de l'intersection avec toute carte compatible sont des segments de droite projective (resp. affine). La structure projective (resp. affine) sera dite convexe si et seulement si toute courbe