M. S. Khalgui

Caractères des représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 219-253
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__219_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n°15,1984,p. 219-253

CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES NORMALES D'UN GROUPE DE LIE CONNEXE

M. S. KHALGUI

FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
CAMPUS UNIVERSITAIRE
1060 TUNIS
TUNISIE

M. S. KHALGUI

RÉSUMÉ :

Soient G un groupe de Lie réel connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et T une représentation factorielle normale de G dont le noyau dans $C^*(G)$ est égal au noyau de l'une des représentations irréductibles de G construites par Duflo.

On associe à T une R-orbite Ω dans le dual de $\mathfrak{g}$. Dans le cas où la sous-algèbre $\mathfrak{g}(g)$ $(g \in \Omega)$ est nilpotente, on montre que T a un caractère distribution relativement au bicommutant $T(G)''$ si et seulement si Ω est tempérée.

Dans ce cas, on a une formule de caractère de Kirillov. Ces résultats généralisent les résultats analogues obtenus dans le cas où G est résoluble et dans le cas où T est irréductible normale.

ABSTRACT :

Let G be a real connected Lie group, $\mathfrak{g}$ it's Lie algebra, T a factor normal representation of G such that the kernel of T in $C^*(G)$ is equal to the kernel of one of the irreducible representations of G constructed by Duflo. We associate to T a R-orbit Ω in the dual of $\mathfrak{g}$. When the stabilizer $\mathfrak{g}(g)$ of g $(g \in \Omega)$ in $\mathfrak{g}$ is nilpotent, we prove that T has a distribution character if and only if Ω is tempered, and in this case we have a Kirillov's character formula. These results generalise the results obtained in the case G solvable and the case T irreducible normal representation of G.

CARACTÈRES DES REPRÉSENTATIONS FACTORIELLES

PLAN

INTRODUCTION

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$, T une représentation (unitaire) irréductible de G . Kirillov a conjecturé le résultat suivant : Il existe une G-orbite Ω pour l'action de la représentation coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, et une fonction P_Ω G-invariante, de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}$ et telle que $P_\Omega(0) = 1$ de telle sorte que l'on ait :

$$(1) \qquad \mathrm{tr}\, T(\exp X) = \int_\Omega P_\Omega(X)^{-1} e^{i<g,x>} d\beta_\Omega(g) \qquad (T.14)$$

au voisinage de l'origine dans $\mathfrak{g}$.

Cette formule a été démontrée progressivement et sous des hypothèses convenables dans les cas suivants : dans le cas nilpotent [Ki] , dans le cas compact [Ki] ; [Pu,1] , dans le cas résoluble [Pu,2] , [Di,1] , [Kh,1] , dans le cas réductif [Ro] , dans le cas moyennable [Kh,2] et dans le cas général [Kh,3].

Dans le chapitre III, on donne un énoncé plus général que celui de [Kh,2] et [Kh,3] . Plus précisément, soient g une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ admissible et bien polarisable, $\tau \in X_G^{irr}(g)$ (cet ensemble est défini au §. III), $T = T_{g,\tau}^G$ la représentation associée à (g,τ) par M. DUFLO, et $\Omega = G \cdot g$. Supposons $\mathfrak{g}(g)$ nilpotente $(g \in \Omega)$ (T.11) et $\dim(\tau) < +\infty$. Alors l'orbite Ω est tempérée (T.18) si et seulement si T a un caractère distribution, et dans ce cas, on a la formule suivante au voisinage de l'origine :

$$(2) \qquad \mathrm{tr}(T(\exp X)) = \dim(\tau) \int_\Omega j(X)^{-1} e^{i<g,X>} d\beta_\Omega(g)$$

où j est la fonction définie sur $\mathfrak{g}$ par :

$$j(X) = \left(\det\left(\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ad}X/2)}{\mathrm{ad}X/2}\right)\right)^{1/2} .$$

Dans [Kh,1] , suivant une suggestion de L. Pukanszky, on a montré dans le cas d'un groupe de Lie résoluble connexe, que la formule (1) reste encore valable pour une représentation factorielle normale T de G associée à une R-orbite Ω (comme dans [Pu,3]) tempérée dans $\mathfrak{g}^*$ (T.18).