MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HUBERT RUBENTHALER

Paramétrisation d'orbites dans les nappes de Dixmier admissibles

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 255-275

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__255_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984,p. 255-275

PARAMÉTRISATION D'ORBITES DANS LES NAPPES DE DIXMIER ADMISSIBLES

Hubert RUBENTHALER
I.R.M.A. , 7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex, France

Résumé : Nous montrons que dans les algèbres de Lie semi-simples complexes, certaines nappes de Dixmier dites admissibles, admettent une section de leurs orbites qui est un espace affine.
Ceci généralise la section de Kostant des éléments réguliers.

Abstract: We show that in a complex semi-simple Lie algebra, suitable Dixmier sheets (so called admissible) admit a section of their orbits which is an affine space.
This is a generalization of Kostant's section of the regular elements.

1. Sous-algèbres paraboliques et espaces préhomogènes associés.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, Ψ une base de R fixée une fois pour toutes et θ une partie de Ψ. On désigne par $\mathfrak{h}_\theta$ l'orthogonal de θ :

$$\mathfrak{h}_\theta = \{X \in \mathfrak{h} \ , \ \alpha(X) = 0 \ \ \forall\alpha \in \theta\} \ .$$

Dans $\mathfrak{h}_\theta$ on distingue l'élément H^θ défini par les équations $\alpha(H^\theta) = 0$ si $\alpha \in \theta$ et $\alpha(H^\theta) = 2$ si $\alpha \in \Psi - \theta$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g} \ , \ [H^\theta, X] = 2pX\} \ .$$

On vérifie trivialement que $[d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta)$, ce qui montre qu'on a ainsi obtenu une $\mathbb{Z}$-graduation.

L'espace $d_o(\theta)$, que nous noterons désormais ℓ_θ, est une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$, qui opère par l'action adjointe dans chacun des $d_i(\theta)$. Nous noterons L_θ le sous-groupe connexe du groupe adjoint G de $\mathfrak{g}$ correspondant à ℓ_θ. La représentation précédente de ℓ_θ dans chacun des $d_i(\theta)$ provient évidemment d'une représentation de L_θ dans les $d_i(\theta)$. Ces représentations sont notées $(\ell_\theta, d_i(\theta))$ et $(L_\theta, d_i(\theta))$.

On sait (Vinberg) que ces représentations sont préhomogènes, c'est-à-dire que l'action de L_θ dans $d_i(\theta)$ admet une orbite Zariski ouverte. Pour tout ce qui concerne de tels espaces préhomogènes (qui sont dits de type parabolique) nous renvoyons à [9] ou [10]. Posons

$$n_\theta^+ = \sum_{p\geq 1} d_p(\theta) \quad , \quad n_\theta^- = \sum_{p\leq -1} d_p(\theta) \ .$$

Alors $\mathfrak{p}_\theta = \ell_\theta + n_\theta^+$ est la sous-algèbre parabolique standard associée à θ.
Son radical nilpotent est n_θ^+ et son radical résoluble est $\mathfrak{r}_\theta = \mathfrak{h}_\theta + n_\theta^+$.
L algèbre ℓ_θ est une sous-algèbre de Lévi de $\mathfrak{p}_\theta$.

La représentation $(\ell_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ est maximale, c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Card}(\Psi - \theta) = 1$ (ce résultat est classique, voir par exemple [9]).

On sait que les espaces préhomogènes intéressants (ceux qui, par exemple, possèdent une fonction zêta associée) sont les espaces préhomogènes dits réguliers, ce qui signifie que le sous-groupe d'isotropie de la grosse orbite est réductif.

Le critère important de régularité est le suivant :

THÉORÈME 1.1. ([9],[10])

<u>Supposons que</u> $\mathrm{Card}(\psi - \theta) = 1$.

<u>Alors l'espace préhomogène</u> $(\mathfrak{l}_\theta , d_1(\theta))$ <u>est régulier si et seulement si il existe</u> $X \in d_1(\theta)$ <u>et</u> $Y \in d_{-1}(\theta)$ <u>tels que</u> (Y , H^θ , X) <u>soit un</u> $\mathfrak{sl}_2$<u>-triplet.</u>

2. Parties admissibles et sous-algèbres associées.

Ce paragraphe constitue un rappel des résultats de l'article [11] auquel nous renvoyons pour les démonstrations.

Si π est une partie de ψ nous désignerons par $\langle\pi\rangle$ l'ensemble des racines qui sont combinaison linéaire d'éléments de π . On pose également $\langle\pi\rangle^+ = R^+ \cap \langle\pi\rangle$ et $\langle\pi\rangle^- = R^- \cap \langle\pi\rangle$, où R^+ et R^- sont respectivement les racines positives et négatives. Si $\gamma \in R$ on désigne par $\mathfrak{g}^\gamma$ l'espace radiciel usuel correspondant à γ et par H_γ la coracine habituelle.

Nous identifierons toute partie de ψ à un sous-graphe du graphe de Dynkin de ψ . Il est alors possible de parler des composantes connexes d'une telle partie. Si $\alpha \in \psi - \theta$, nous noterons ψ_α la composante connexe de $\theta \cup \{\alpha\}$ contenant α .

Soit $\theta_\alpha = \psi_\alpha - \{\alpha\}$. Soit $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\psi_\alpha} \mathbb{C}.H_\gamma + \sum_{\gamma\in\langle\theta_\alpha\rangle} \mathfrak{g}^\gamma$.

Soient

$$n^+_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\langle\psi_\alpha\rangle^+ - \langle\theta_\alpha\rangle^+} \mathfrak{g}^\gamma , \quad n^-_{\theta_\alpha} = \sum_{\gamma\in\langle\psi_\alpha\rangle^- - \langle\theta_\alpha\rangle^-} \mathfrak{g}^\gamma$$

On pose $d_1(\theta_\alpha) = d_1(\theta) \cap n^+_{\theta_\alpha}$ et on définit l'élément $H^\theta_\alpha \in \sum_{\gamma\in\psi_\alpha} \mathbb{C}.H_\gamma$ par les équations $\alpha(H^\theta_\alpha) = 2$ et $\gamma(H^\theta_\alpha) = 0$ lorsque $\gamma \in \theta_\alpha$. Il est évident que $d_1(\theta_\alpha) = \{X \in n^+_{\theta_\alpha} , [H^\theta_\alpha , X] = 2X\}$.

Lorsque la sous-algèbre $\mathfrak{p}_\theta$ n'est pas maximale $(\mathrm{Card}(\psi - \theta) \neq 1)$ la décomposition de la représentation $(\mathfrak{l}_\theta , d_1(\theta))$ s'obtient comme suit.

PROPOSITION 2.1.

a) $\mathfrak{g}(\psi_\alpha) = n^-_{\theta_\alpha} + \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} + n^+_{\theta_\alpha}$ <u>est une algèbre de Lie semi-simple de graphe de Dynkin</u> ψ_α .

b) $\mathfrak{p}_{\theta_\alpha} = \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} + n^+_{\theta_\alpha}$ <u>est une sous-algèbre parabolique maximale de</u> $\mathfrak{g}(\psi_\alpha)$.

c) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ <u>la décomposition de</u> $\mathfrak{g}$ <u>en idéaux simples et soit</u>

$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ la décomposition correspondante de R. Soit I l'ensemble des indices i tels que $R_i \cap (\Psi - \theta) = \emptyset$. On a alors

$$\mathfrak{l}_\theta = \Big(\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i \Big) \oplus \Big(\sum_{\alpha \in \Psi - \theta} \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} \Big)$$

(la somme des $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$ n'étant pas directe).

d) $d_1(\theta) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi - \theta} d_1(\theta_\alpha)$ (somme directe) et chaque $d_1(\theta_\alpha)$ est $\mathfrak{l}_\theta$-stable et irréductible sous l'action de $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$ (donc a fortiori irréductible sous l'action de $\mathfrak{l}_\theta$).

e) Les éléments H_α^θ $(\alpha \in \Psi - \theta)$ forment une base de $\mathfrak{h}_\theta$.

Soit $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique dans une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$. Nous allons nous intéresser aux parties θ de Ψ telles que pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, l'espace préhomogène $(\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ soit régulier. Autrement dit, nous considérons les espaces préhomogènes $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ dont toutes les composantes irréductibles sont régulières (ce qui n'est pas le cas en général lorsque $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est régulier).

Introduisons quelques notations. Soit $\bar{R}$ l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de R à $\mathfrak{h}_\theta$. Les éléments de $\bar{R}$ seront appelés racines restreintes. Si $\alpha \in R$ nous noterons $\bar{\alpha}$ sa restriction à $\mathfrak{h}_\theta$. Une racine restreinte $\bar{\alpha}$ sera dite non divisible si elle n'est pas de la forme $c\bar{\gamma}$ $(c \in \mathbb{Z}, c > 1, \gamma \in R)$. Nous désignerons par $\bar{R}_{nd}$ l'ensemble des racines restreintes non divisibles.

Si $\alpha \in R$, nous poserons $\mathfrak{g}^{\bar{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g}, [H,X] = \bar{\alpha}(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}_\theta\}$.
De ce fait, si $\alpha \in \Psi - \theta$, on a $d_1(\theta_\alpha) = \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$.

Au vu du théorème 1.1. et de ce qui précède, on est amené à poser la définition suivante :

DEFINITION 2.2.

Une partie θ est dite admissible si pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, il existe $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{\bar{\alpha}}$, $X_{-\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}^{-\bar{\alpha}}$ tels que $(X_{-\bar{\alpha}}, H_\alpha^\theta, X_{\bar{\alpha}})$ soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet.

On remarque immédiatement d'après la définition que θ est admissible si et seulement si pour tout $\alpha \in \Psi - \theta$, θ_α est admissible dans Ψ_α.
Autrement dit, la classification des parties admissibles se ramène à la classifi-