L. CLOZEL

Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés $\mathfrak{p}$-adiques et caractères des groupes réductifs

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 39-64

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__39_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 39-64

THÉORÈME D'ATIYAH-BOTT POUR LES VARIÉTÉS $\mathfrak{p}$-ADIQUES ET CARACTÈRES DES GROUPES RÉDUCTIFS

L. CLOZEL (*)

(*) CNRS, PARIS
Institute for Advanced Study, Princeton, USA (1983-84)

Partially supported by NSF grant MCS-82 11 506.

L. CLOZEL

1. INTRODUCTION.

Soit F un corps $\mathfrak{p}$-adique. (Nous ne faisons pas d'hypothèse sur la caractéristique de F). Si X est une variété analytique sur F, et C un corps de caractéristique nulle, par exemple le corps des complexes, on peut étudier les distributions sur X à valeurs dans C : ce sont les formes linéaires sur l'espace $C_c^\infty(X,C)$ des fonctions localement constantes de X dans C.

Comme Daniel Heifetz l'a montré dans sa thèse [9], les propriétés élémentaires des distributions décrites par exemple dans [11] - comportement par image directe et inverse, front d'onde, principe de la phase stationnaire - s'étendent à de telles distributions sur les variétés $\mathfrak{p}$-adiques. D. Heifetz s'en sert alors pour étendre aux groupes $\mathfrak{p}$-adiques la notion, due à Howe, de front d'onde d'une représentation.

Le but de cette note est de remarquer qu'une autre propriété élémentaire des distributions, le théorème d'Atiyah-Bott, s'étend sans changement notable aux fibrés sur les variétés $\mathfrak{p}$-adiques qui interviennent dans la théorie des représentations ("fibrés admissibles").

Nous démontrons en fait deux "théorèmes d'Atiyah-Bott". Le premier (Prop. 1) ne s'applique qu'aux fibrés de dimension finie et est l'exact analogue du théorème réel ; nous ne faisons qu'esquisser sa démonstration, puisqu'il suffit d'imiter celle de [11]. Dans le § 4, nous démontrons une extension du théorème aux fibrés admissibles de dimension infinie (Prop. 2) : ce sont de tels fibrés qui interviennent, en général, dans la théorie des représentations des groupes réductifs. Dans les § 5-6, nous appliquons ceci aux représentations admissibles des groupes réductifs. Nous obtenons ainsi une démonstration très simple des formules obtenues par van Dijk pour les caractères des représentations induites [6], ainsi que les formules analogues pour les caractères tordus qui interviennent dans la théorie du changement de base [13]. Ceci donne une preuve très facile du résultat d'induction dans la démonstration des identités de Shintani (Théor. 2), au moins pour GL(n). Pour donner un sens à ce théorème, nous avons été amené à étendre aux caractères tordus le théorème d'Harish-Chandra assurant que les caractères admissibles sont lisses sur l'ensemble régulier (Théor. 1).

L'essentiel de ce travail a été fait au printemps 1981, lors d'un séjour au Sonderforschungsbereich "Theoretische Mathematik" de Bonn. Je suis heureux de remercier l'Université de Bonn, et tout particulièrement G. Harder, de leur hospitalité. Les résultats ont été annoncés lors d'un colloque organisé à Vancouver en août 1981 par W. Casselman.

2. FIBRÉS LISSES ET ADMISSIBLES SUR LES VARIÉTÉS $\mathfrak{p}$-ADIQUES.

2.1. Dans la suite de l'article, F est un corps $\mathfrak{p}$-adique (un corps localement compact non-archimédien) et C un corps de caractéristique nulle. On note $|x|$ la valeur absolue normalisée de $x \in F$: on a donc $|x| \in \mathbb{Q} \subset C$. On considère des variétés *analytiques* X,Y,... sur F ; les morphismes de variétés sont supposés *localement analytiques*.

Soit X une variété analytique sur F. Un *fibré vectoriel lisse* sur X, $\mathcal{E}$, est défini de la façon suivante : localement (sur tout ouvert-fermé assez petit U de X) on a

$$(*) \qquad \mathcal{E}|_U \cong U \times E,$$

E étant un espace vectoriel (de dimension finie ou infinie) sur C ; E n'est muni d'aucune topologie. Si U,V sont deux ouverts-fermés de X, les trivialisations locales de $\mathcal{E}|_U$ et $\mathcal{E}|_V$ donnent de la façon habituelle un cocycle

$$C_{U,V} : U \cap V \to GL(E).$$

On suppose que pour tous vecteurs $v,w \in E$, l'ensemble $\{y \in U \cap V : C_{U,V}(y)v = w\}$ est ouvert dans $U \cap V$.

Une *section lisse* du fibré $\mathcal{E}$ est une section de $\mathcal{E}$ comme fibré vectoriel donnée, dans les trivialisations locales $(*)$, par des applications $x \to (x,s(x))$ où $s(x)$ est une application localement constante $U \to E$. On vérifie que cette définition, pour un fibré lisse, est indépendante de la trivialisation. On note $C_c^\infty(X,\mathcal{E})$ l'espace des sections lisses à support compact de $\mathcal{E}$. Un fibré lisse sur X peut être aussi défini par la donnée de ses cocycles $C_{U,V} : U \cap V \to GL(E)$ satisfaisant la condition de différentiabilité, ainsi que la relation de cocycle habituelle (cf. e.g. [16, ch. 1]).

Remarque : Cette notion de fibrés est analogue à la notion de "ℓ-faisceaux" de Bernstein-Zelevinskii [2]. En particulier, le faisceau des sections lisses de $\mathcal{E}$ est un ℓ-faisceau.

Exemples. 1. Soit X = G/H, où G est un groupe de Lie sur F et H un sous-groupe fermé de G. Si π_H est une représentation lisse ([15] : ce sont les représentations "algébriques" de [2]) de H sur un espace vectoriel E sur C, elle définit un fibré homogène lisse $\mathcal{E}$ sur X. La représentation induite (resp. induite à support compact) agit sur les sections lisses (resp. lisses à support compact) de $\mathcal{E}$.

2. Soit X une variété analytique, $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts-fermés locaux ; on suppose que pour $U \in \mathcal{U}$, on a un isomorphisme analytique j_U de U sur un ouvert de F^n, où $n = \dim(X)$.

On définit un cocycle à valeurs dans C^X de la façon suivante : si $U,V \in \mathcal{U}$, on a une application $j_U j_V^{-1}$ de $j_V(U \cap V) \subset F^n$ dans $j_U(U \cap V)$. On peut considérer sa différentielle $d(j_U j_V^{-1})$; on définit alors $c_{U,V}(x) = |\det(d(j_U j_V^{-1})_x)|$. Ceci définit un fibré sur X, noté $|\Lambda|(X)$, le fibré des *densités* sur X. Si ϕ est un section à support compact de $|\Lambda|(X)$, l'intégrale $\int_X \phi$ est bien définie, comme le montre la formule de changement de variables ([6, Théor. 1]). Une telle section sera appelée densité sur X.

Les opérations fonctorielles bien connues sur les fibrés différentiables s'étendent aux fibrés lisses ; nous ne donnons pas de détails. Si $f : X \to Y$ est localement analytique et si $\mathcal{E}$ est un fibré lisse sur Y, on peut ainsi définir son image réciproque $f^{\#}\mathcal{E}$ sur X. La fibre de $\mathcal{F} = f^{\#}\mathcal{E}$ au point $x \in X$ s'identifie canoniquement à la fibre $\mathcal{E}_{f(x)}$ de $\mathcal{E}$ au point $f(x)$. Soit $\mathcal{E} \to X$, $\mathcal{F} \to Y$ deux fibrés lisses. Un *morphisme de fibrés* de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ (Atiyah-Bott [1]) est la donnée d'un couple (f,r) où f est un morphisme : $X \to Y$, et r une section lisse du fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(f^{\#}\mathcal{F}, \mathcal{E})$.

Plutôt que de définir le fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{E})$ si $\mathcal{G}, \mathcal{E}$ sont de dimension infinie, précisons les conditions que nous imposons à r. Tout d'abord, r est la donnée d'une famille d'homomorphismes $r(x) : (f^{\#}\mathcal{F})_x \cong \mathcal{F}_{f(x)} \to \mathcal{E}_x$. La condition de différentiabilité est la suivante : fixons des trivialisations locales $\mathcal{F} \cong U \times F$, $\mathcal{E} \cong V \times E$, U étant un voisinage de $f(x)$ et $V \subset f^{-1}(U)$ un voisinage de x. On peut alors identifier $r(y)$, pour $y \in V$, à un homomorphisme $F \to E$; on impose que pour tout $u \in F$, $v \in E$, l'ensemble $\{y \in V \mid r(y)u = v\}$ soit ouvert dans V.

Si (f,r) est un tel morphisme de fibrés, il définit une application entre les espaces de sections $C^\infty(Y,\mathcal{F}) \to C^\infty(X,\mathcal{E})$ qui à $s(y)$ associe $t(x) = r(x)s(f(x))$.

2.2. Soit X une variété analytique, que nous supposons dorénavant *compacte*. Si Y est une variété, une *action* de Y sur X est une application *localement* analytique $f : Y \times X \to X$. Elle est *localement transitive* ([11, p. 312]) si pour tout (y,x), la différentielle : $T_y(Y) \to T_{f(y,x)}(X)$ est surjective.