MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MICHEL DUFLO
GERRIT HECKMAN
MICHELE VERGNE

Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 15 (1984), p. 65-128
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_15__65_0>

Société Mathématique de France
2e série, Mémoire n° 15, 1984, p. 65-128

PROJECTION D'ORBITES, FORMULE DE KIRILLOV ET FORMULE DE BLATTNER

Michel DUFLO, *Gerrit* HECKMAN *et Michèle* VERGNE

Michel DUFLO,
UER de Mathématiques,
2, place Jussieu, PARIS VII
75251 PARIS Cédex 05, FRANCE

Gerrit HECKMAN (*)
Department of Mathematics
University of Leiden
Wassernaarseweg 80, Postbus 9512
2300 RA Leiden
The Netherlands

Michèle VERGNE
Department of Mathematics
MIT Cambridge
MA 02139 U.S.A.

(*) Partially supported by NSF Grant MCS - 8203769.

M. DUFLO, G. HECKMAN et M. VERGNE

RÉSUMÉ

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe, K l'image réciproque d'un sous-groupe compact maximal de AdG. Soit Ω une orbite de G dans le dual $\underline{g}^*$ de son algèbre de Lie $\underline{g}$, munie de sa mesure de Liouville β_Ω. L'image directe de β_Ω sur $\underline{k}^*$ par la projection orthogonale est une mesure tempérée sur $\underline{k}^*$. Nous la calculons lorsque Ω est régulière et elliptique. Supposons de plus Ω admissible et soit T_Ω la représentation unitaire irréductible de G associée par Harish-Chandra. Nous démontrons une formule, dans le style de celle de Kirillov, permettant de calculer le caractère de T_Ω en fonction de transformées de Fourier d'orbites, dans G tout entier. Comme application, nous donnons une nouvelle démonstration de la formule de Blattner décrivant la restriction de T_Ω à K.

SUMMARY

Let G be a connected semi-simple Lie group and let K be the inverse image of a maximal compact subgroup of AdG. Let Ω be an orbit of G in the dual $\underline{g}^*$ on the Lie algebra $\underline{g}$ of G. Let β_Ω be its Liouville measure. The push-forward of β_Ω by the orthogonal projection on $\underline{k}^*$ is a tempered measure on $\underline{k}^*$. We compute this measure when Ω is regular and elliptic. Suppose moreover that Ω is admissible, and let T_Ω be the unitary irreducible representation of G associated to Ω by Harish-Chandra. We prove a Kirillov type formula which gives the character of T in term of Fourier transform of orbits, everywhere in G. As an application, we give a new proof of Blattner's formula, which describes the restriction of T_Ω to K.

TABLE DES MATIÈRES

PROJECTION D'ORBITES

A la mémoire d'Harish-Chandra

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe. Soient $\underline{g}$ son algèbre de Lie et $\underline{g} = \underline{k} \oplus \underline{p}$ une décomposition de Cartan de $\underline{g}$. Nous supposons que $\underline{g}$ et $\underline{k}$ ont le même rang. Dans le dual $\underline{g}^*$ de $\underline{g}$ nous choisissons une orbite Ω de G, régulière et elliptique. Comme il est bien connu, c'est une variété symplectique (cf. [Ki]), et sa mesure de Liouville β_Ω, considérée comme mesure sur $\underline{g}^*$, est tempérée.

Dans le premier chapitre de cet article, nous étudions la mesure $J_*(\beta_\Omega)$ sur $\underline{k}^*$, image directe de la mesure β_Ω par la restriction J de la projection de $\underline{g}^*$ sur $\underline{k}^*$ parallèlement à $\underline{p}^*$. Soit K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\underline{k}$. L'action de K sur Ω est hamiltonienne, et l'application J est précisément l'application moment correspondante. La description de $J_*(\beta_\Omega)$ nécessite quelques notations.

Soit $\underline{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\underline{k}$.

Soient $\Delta \subset i\underline{t}^*$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{g}_{\mathbb{C}}$,

$\Delta_c \subset \Delta$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{k}_{\mathbb{C}}$,

$\Delta_n \subset \Delta$ l'ensemble des racines de $\underline{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\underline{p}_{\mathbb{C}}$.

On note W le groupe de Weyl de Δ_c. On identifie $\underline{t}^*$ à l'orthogonal de $[\underline{t},\underline{g}]$ dans $\underline{g}^*$. Alors $\Omega \cap \underline{t}^*$ est une orbite de W. Notons λ un point de cette orbite. Nous notons Δ^+ le système de racines positives pour lequel $\Lambda = i\lambda$ est dominant.

Si $\xi \in \underline{t}^*$ est un élément non nul, nous notons H_ξ la mesure d'Heaviside sur $\underline{t}^*$:

(1) $$H_\xi(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t\xi)dt.$$

Nous posons, si $\Delta^+ \cap \Delta_n = \{\alpha_1,\dots,\alpha_p\}$,

(2) $$Y^+ = H_{-i\alpha_1} * \dots * H_{-i\alpha_p}$$

(Y^+ est une mesure tempérée, homogène, localement polynômiale, ne dépendant que de la chambre déterminée par Λ),

(3) $$B_\lambda = \sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, w\,.\,(\delta_\lambda * Y^+)$$

(B_λ est une mesure W-anti-invariante sur $\underline{t}^*$).

Pour tout élément $\xi \in \underline{t}^*$, régulier dans $\underline{k}^*$, nous posons

$$s_+(\xi) = \varepsilon(\sigma), \text{ où } \sigma \in W \text{ est l'élément tel que } i\sigma\xi \quad \text{soit } \Delta_c^+\text{-dominant.}$$

De plus, si φ est une fonction C^∞ sur $\underline{k}^*$, nous posons

$$A^+(\varphi)(\xi) = \frac{1}{\# W}\, s_+(\xi) \int_{K\xi} \varphi(f)\, d\beta_{K\xi}(f) \tag{4}$$

où $\beta_{K\xi}$ est la mesure de Liouville sur l'orbite $K\xi$ de ξ dans $\underline{k}^*$.

En fait, $A^+(\varphi)$ se prolonge en une fonction C^∞ sur $\underline{t}^*$, W-anti-invariante, et A^+ ne dépend que de la chambre déterminée par Λ.

Le résultat principal du chapitre I est le suivant, qui calcule $J_*(\beta_\Omega)$.

THÉORÈME A.- Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\underline{k}^*)$. On a

$$\int_\Omega \varphi(Jf)\, d\beta_\Omega(f) = \int_{\underline{t}^*} A^+(\varphi)(\xi)\, dB_\lambda(\xi). \tag{5}$$

Du théorème A, on déduit facilement une formule pour la transformée de Fourier (sur $\underline{k}$) de $J_*(\beta_\Omega)$, qui n'est autre que la restriction à $\underline{k}$ de la transformée de Fourier $\hat{\beta}_\Omega$ (sur $\underline{g}$) de β_Ω (*). Comme corollaire, on obtient une nouvelle démonstration de la formule de Rossmann [R] qui calcule la restriction de $\hat{\beta}_\Omega$ à l'ouvert $\underline{k} \cap \underline{g}'$ de $\underline{k}$ formé des éléments de $\underline{k}$ réguliers dans $\underline{g}$. Rappelons quelle est cette formule. Dans $\underline{g}'$, $\hat{\beta}_\Omega$ est une fonction C^∞ G-invariante. Pour la calculer dans $\underline{g}' \cap \underline{k}$, il suffit donc de la calculer sur $\underline{t} \cap \underline{g}'$.

Si $X \in \underline{t} \cap \underline{g}'$, on a

$$\hat{\beta}_\Omega(X) = (-1)^{\frac{1}{2}\dim \underline{p}}\ \frac{\sum_{w\in W} \varepsilon(w)\, e^{w\Lambda(X)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+} \alpha(X)} \tag{6}$$

Outre celle de Rossmann [R], on trouvera des démonstrations de la formule

----

(*) La transformée de Fourier de β_Ω est la fonction généralisée sur $\underline{g}$ définie par la formule

$$\hat{\beta}_\Omega(X) = \int_{\underline{g}^*} e^{if(X)}\, d\beta_\Omega(f)$$

Les notions de fonction généralisée et de restriction de fonctions généralisées à des sous-variétés sont rappelées dans l'appendice.