MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CHRISTIAN U. JENSEN

Théorie des modèles pour des anneaux de fonctions entières et des corps de fonctions méromorphes

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 16 (1984), p. 23-40

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__23_0>

Société Mathématique de France
2° série, mémoire n° 16, 1984, p. 23-40

THÉORIE DES MODÈLES POUR DES ANNEAUX DE FONCTIONS ENTIÈRES ET DES CORPS DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

Christian U. Jensen

Résumé. Pour un sous-corps K de $\underline{\underline{C}}$ soit $E(K)$ le sous-anneau de $K[[X]]$ formé des séries formelles dont le rayon de convergence est infini. Si $\rho \in \underline{\underline{R}}^+$ ou $\rho = \infty$ on désigne par E_ρ l'anneau des fonctions entières d'ordre $< \rho$. On pose $E_\rho(K) = E_\rho \cap E(K)$. On montre entre autres choses que l'anneau des polynômes $K[X]$ est définissable dans $E_\rho(K)$ si $\rho < \infty$ ou $K = \underline{\underline{R}}$ ou $K = \underline{\underline{C}}$. En particulier, ces anneaux sont indécidables. De plus, si $K = \underline{\underline{R}}$ ou $K = \underline{\underline{C}}$, alors $E_\rho(K) \equiv E_\sigma(K)$ entraine $\rho = \sigma$. Soit $M_\rho(K)$ le corps des fractions de $E_\rho(K)$. Si $\rho > 0$ les corps $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ sont indécidables, et l'on peut même interpréter l'arithmétique du second ordre dans ces corps. Si $\rho \leq 1$ et K est un sous-corps pythagoricien de $\underline{\underline{R}}$, les corps $M_\rho(K)$ sont indécidables. Si $\rho > 1$ le sous-anneau de $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ formé des fonctions sans pôles réels est définissable dans $M_\rho(\underline{\underline{R}})$.

Summary. For a subfield K of $\underline{\underline{C}}$ let $E(K)$ be the subring of $K[[X]]$ consisting of all formal power series of infinite convergence radius. If $\rho \in \underline{\underline{R}}^+$ or $\rho = \infty$ we denote by E_ρ the ring of all entire functions of order $< \rho$. We set $E_\rho(K) = E_\rho \cap E(K)$. It is shown that the polynomial ring $K[X]$ is definable in $E_\rho(K)$ if $\rho < \infty$ or $K = \underline{\underline{R}}$ or $K = \underline{\underline{C}}$. In particular, these rings are undecidable. Moreover, if $K = \underline{\underline{R}}$ or $K = \underline{\underline{C}}$, then $E_\rho(K) \equiv E_\sigma(K)$ implies $\rho = \sigma$. Let $M_\rho(K)$ be the quotient field of $E_\rho(K)$. The fields $M(\underline{\underline{R}})$ are undecidable, and it is even possible to interpret second order number theory in these fields. If $\rho \leq 1$ and K is a Pythagorean subfield of $\underline{\underline{R}}$ the fields $M_\rho(K)$ are undecidable. If $\rho > 1$ the subring of $M_\rho(\underline{\underline{R}})$ consisting of all functions with no real poles is definable in $M_\rho(\underline{\underline{R}})$.

0037-9484/84 03 23 18/$ 3.80/

C.U. JENSEN

1. ANNEAUX DES FONCTIONS ENTIÈRES.

1.1. Préliminaires. Soit E l'anneau des fonctions entières complexes d'une variable complexe. Pour un sous-corps K de $\mathbb{C}$ soit $E(K)$ l'anneau des fonctions entières à coefficients dans K, c.-à-d. le sous-anneau de $K[[X]]$ formé des séries formelles dont le rayon de convergence est infini. Évidemment $E = E(\mathbb{C})$.

$E(K)$ est un anneau intègre non-noethérien, mais $E(K)$ est un anneau de Bézout, c.-à-d. tout idéal de type fini est principal. Dans le cas $K = \mathbb{C}$ ce résultat est dû à Wedderburn (14) et dans le cas général il est dû a Helmer (5).

Nous allons esquisser la démonstration d'un résultat plus précis qui est dû à Rubel (12) dans le cas $K = \mathbb{C}$.

Proposition 1.1. Pour tout corps $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \not\subseteq \mathbb{R}$, l'anneau $R = E(K)$ est un anneau de Bézout dont le rang stable est égal à 1, c.-à-d. pour tout couple (f,g) de fonctions de R il existe une fonction $h \in R$ telle que $Rf + Rg = R(f+gh)$[1].

Pour la démonstration on a besoin d'un lemme d'interpolation.

Lemme 1.2. Soit $\{\alpha_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$ une partie discrète de $\mathbb{C}$ et soit $p_n = \sum_{j=0}^{t_n} a_{nj}(x-\alpha_n)^j$ un polynôme en $(x-\alpha_n)$ à coefficients complexes. Si $\alpha_n = 0$ on suppose $a_{n,0},..,a_{n,t_n} \in K$. De plus, si $K \subseteq \mathbb{R}$, on suppose $p_n = \overline{p}_m$ lorsque $\alpha_n = \overline{\alpha}_m$. Alors, il existe $f \in E(K)$ telle que

$$f \equiv \sum_{j=0}^{t_n} a_{nj}(x-\alpha_n)^j \mod (x-\alpha_n)^{t_n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En ce qui concerne la preuve du lemme nous remarquons que l'on procède comme dans le cas classique $K = \mathbb{C}$ en utilisant le fait suivant (cf. 5, 6).

Soit f une fonction entière et K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Si $K \subseteq \mathbb{R}$ on suppose $f \in E(\mathbb{R})$. Alors, il existe une fonction entière g telle que $f \exp(g) \in E(K)$.

Retournons maintenant à la démonstration de la proposition 1.1. Ici et dans ce qui suit nous désignons par $Z(f)$, $f \in E$, l'ensemble des zéros de f.

Pour vérifier l'assertion de la proposition on peut se restreindre au cas où $Z(f) \cap Z(g) = \emptyset$.

Soit $Z(g) = \{\beta_n\}$ et soit t_n la multiplicité de β_n en tant que zéro de g. Puisque $f(\beta_n) \neq 0$ on construit - en considérant $\log f$ en β_n - un polynôme $u_n = \sum_{j=0}^{t_n-1} a_{j,n}(x-\beta_n)^j$ tel que

$$f - \exp(u_n) \equiv 0 \mod (x-\beta_n)^{t_n} .$$

Par le lemme 1.2 il existe une fonction $u \in E(K)$ telle que $f - \exp(u) \equiv 0 \mod g$; donc pour une fonction convenable $h \in E(K)$ la fonction $f + gh$ est inversible dans $E(K)$.

On dit qu'une fonction entière f est d'ordre fini s'il existe deux nombres réels a et c tels que

$$|f(x)| \leqq c \exp(|x|^a) \qquad (*)$$

pour tout $x \in \mathbb{C}$.

La borne inférieure ρ des nombres a pour lesquels (*) est satisfait pour une constante c (dépendante de a) est appelée l'ordre de la fonction f. (Pour de plus amples détails voir (3,13).)

On peut montrer qu'une fonction entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est d'ordre fini ρ si et seulement $\liminf \log(1/|a_n|) / n \log n = 1/\rho$. (Si la borne ci-dessus est ∞ (resp. 0) la fonction f est d'ordre 0 (resp. ∞).)

Rappelons le théorème de factorisation de Hadamard. Soit f une fonction entière d'ordre $\rho < \infty$ et $Z(f) = \{\alpha_j\}$. Alors f est de la forme

$$f(x) = \exp(h(x))\, x^n \prod_{\alpha_j \neq 0} (1-x/\alpha_j)\exp\left(1+x/\alpha_j + \ldots + \frac{1}{[\rho]}(x/\alpha_j)^{[\rho]}\right),$$

où $[\rho]$ est le plus grand entier $\leq \rho$, $h(x)$ un polynôme de degré $\leq \rho$, et $n = 0$, si 0 n'est pas un zéro de f.

Pour une suite $\{\alpha_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, de nombres complexes l'exposant de convergence est défini comme la borne inférieure des nombres positifs p tels que $\sum_{\alpha_n \neq 0} |\alpha_n|^{-p} < \infty$.

Alors, c'est un résultat classique qu'une partie discrète $\{\alpha_j\}$ de $\mathbb{C}$ est l'ensemble des zéros d'une fonction d'ordre $\leq \rho$ si et

seulement si l'exposant de convergence de la suite $\{\alpha_j\}$ est $\leqq \rho$.

Pour un nombre donné ρ les fonctions d'ordre $< \rho$ (resp. $\leqq \rho$) forment un sous-anneau E_ρ ($\overline{E}_\rho$) de E. L'anneau $E_\infty = \bigcup_{\rho<\infty} E_\rho$ est formé par toutes les fonctions entières d'ordre fini.

Pour un sous-corps K de $\mathbb{C}$ on définit $E_\rho(K) = E_\rho \cap E(K)$, $0 < \rho \leqq \infty$, et $\overline{E}_\rho(K) = \overline{E}_\rho \cap E(K)$, $0 \leq \rho < \infty$.

La structure des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ est plus compliquée que celle des anneaux $E(K)$. Comme $E(K)$ les anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ ne sont pas noethériens, mais à la différence de $E(K)$ aucun des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ n'est un anneau de Bézout. (Il existe même deux fonctions f et g d'ordre zéro telles que l'idéal $E_\infty f + E_\infty g$ n'est pas principal dans E_∞.) De plus, c'est une question ouverte de savoir quel est le rang stable des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$.

Cependant, c'est une conséquence facile du théorème de factorisation que chacun des anneaux $E_\rho(K)$ et $\overline{E}_\rho(K)$ est complètement intégralement clos dans son corps des fractions. La preuve s'appuie sur le fait suivant. Si R désigne un des anneaux $E_\rho(K)$ ou $\overline{E}_\rho(K)$, alors une fonction $f \in R$ divise une fonction $g \in R$ dans R si f divise g dans E. Ceci signifie que E/R est un R-module sans torsion.

Nous finissons cette section en mentionnant quelques résultats concernant la dimension globale et la dimension de Krull (notée K-dim) de ces anneaux.

Théorème 1.3. Soit R un sous-anneau de E contenant $E_0(\mathbb{R})$ et supposons que E/R soit un R-module sans torsion. Alors:

gl.dim $R \geqq 3$; de plus, l'énoncé "gl.dim $R = \infty$" est compatible avec ZFC + MA. (MA = l'axiome de Martin.)

K-dim $R \geqq 2^{\aleph_0}$; de plus, l'énoncé "K-dim $R = 2^{2^{\aleph_0}}$" est compatible avec ZFC + MA.

Si l'on suppose de plus que R est un anneau de Bézout, alors pour tout t, $3 \leqq t \leqq \infty$, l'énoncé "gl.dim $R = t$" est compatible avec ZFC + MA.

De même, dans le cas où R est un anneau de Bézout, soient P, Q et P' trois idéaux premiers de R tels que $P \subsetneqq Q \subsetneqq P'$.