MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOISE DELON

Corps équivalents à leur corps de séries

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 16 (1984), p. 95-103
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__95_0>

Société Mathématique de France
2° série, mémoire n° 16, 1984, p.95-103

CORPS ÉQUIVALENTS A LEUR CORPS DE SÉRIES

Françoise Delon

Les équivalences élémentaires qui suivent se réfèrent au langage $\{0,1,+,.\}$. Si K est un corps de caractéristique nulle, dès qu'on a $K \equiv K((X))$, le théorème d'Ax-Kochen-Eršov implique $K \equiv K((X_1))\dots((X_p))$ pour tout entier $p \geq 1$. Nous montrons ici la réciproque de ce résultat:

Théorème. Si K est un corps de caractéristique 0 et si pour un entier $p \geq 1$, on a $K((X_1))\dots((X_p)) \equiv K$, on a alors $K \equiv K((X))$.

On montre aussi que, sous les mêmes hypothèses, si on considère K comme corps de constantes de son corps de séries $K((X))$, K est existentiellement clos dans $K((X))$.

Des résultats de même nature et plus complets sont exposés dans [D] mais le cadre plus général y complique sensiblement les preuves; au contraire on a essayé de donner ici des démonstrations élémentaires, ne faisant appel qu'à peu de connaissances extérieures. Ainsi on n'utilise des travaux de Gurevič sur les groupes abéliens ordonnés qu'un corollaire, dont on donne une preuve directe - qui m'a été indiquée par Peter Schmitt - et on fait sur la théorie des valuations les rappels nécessaires à la compréhension de cet exposé.

1. Groupes abéliens ordonnés (g.a.o.)

Dans cette catégorie, les sous-groupes convexes jouent un rôle essentiel (une partie A d'un ordre I est convexe lorsque $a,b \in A$, $i \in I$ et $a < i < b$ impliquent $i \in A$): si H est un sous-groupe convexe d'un g.a.o. G, les classes modulo H sont convexes et sont donc naturellement ordonnées par la relation

$$x/H < y/H \quad \text{ssi} \quad (\ x \not\equiv y \ (\text{modulo } H) \text{ et } x < y).$$

Si G_1 et G_2 sont deux g.a.o. on appelle produit lexicographique de G_1 et G_2 le

0037-9484/84 03 95 09/$ 2.90/ © Gauthier-Villars

groupe produit $G_1 \times G_2$ muni de l'ordre

$$(x_1,x_2) < (y_1,y_2) \quad \text{ssi} \quad x_1 < y_1 \quad \text{ou} \quad (x_1 = y_1 \text{ et } x_2 < y_2)$$

pour $x_1,y_1 \in G_1$ et $x_2,y_2 \in G_2$; le plongement canonique de G_2 dans le g.a.o. $G_1 \times G_2$ en fait un sous-groupe convexe et on a un isomorphisme de g.a.o. entre G_1 et $(G_1 \times G_2)/G_2$; ce produit lexicographique est associatif. Plus généralement, pour un bon ordre I et des g.a.o. G_i , $i \in I$, le produit lexicographique $\prod_{i\in I} G_i$ s'obtient en munissant le groupe produit de l'ordre

$$(x_i)_{i\in I} < (y_i)_{i\in I} \quad \text{ssi} \quad x_{i_\circ} < y_{i_\circ}$$

où $i_\circ$ est le premier indice i tel que $x_i \neq y_i$; si les I_j , $j\in J$, recouvrent I, sont disjoints, convexes pour l'ordre de I et vérifient $I_j < I_{j'}$ ssi $j < j'$, alors (J et les I_j sont bien ordonnés et) on a un isomorphisme de g.a.o.

$$\prod_{i\in I} G_i = \prod_{j\in J} (\prod_{i\in I_j} G_i) .$$

Les sous-groupes convexes d'un produit $\prod_{i\in I} G_i$ sont les sous-groupes de la forme $\prod_{i<i_\circ} \{0\} \times H_{i_\circ} \times \prod_{i>i_\circ} G_i$, pour un $i_\circ \in I$ et un sous-groupe convexe $H_{i_\circ}$ de $G_{i_\circ}$. Le produit lexicographique est un cas simple du produit de Hahn explicitement donné par Feferman et Vaught comme exemple de produit auquel s'applique leur principe de transfert d'équivalence élémentaire ([FV] exemple 4.9); en conséquence $G_i \equiv G'_i$ pour tout $i\in I$, implique $\prod_{i\in I} G_i \equiv \prod_{i\in I} G'_i$, ces équivalences étant dans le langage des groupes ordonnés.

<u>Lemme</u> 1. [Gu]. Soit H un sous-groupe convexe d'un g.a.o. G ; alors les g.a.o. G et $(G/H)\times H$ sont élémentairement équivalents.

Démonstration. Il est connu que, dès qu'un groupe abélien est ω_1-saturé, il est facteur direct dans toute extension où il est pur (H pur dans G signifie ici $nG \cap H = nH$ pour tout entier n), voir [Sa] ou [Sh] . Dans un g.a.o. un sous-groupe convexe est toujours pur, donc si on prend un couple $H' \subset G'$ équivalent au couple $H \subset G$ dans le langage $\{0,+,<,H\}$ et ω_1-saturé, les groupes $(G'/H')\times H'$ et G' sont isomorphes; on vérifie immédiatement que cet isomorphisme respecte aussi l'ordre si l'on munit G'/H' de l'ordre quotient (H' reste convexe dans G') puis $(G'/H')\times H'$ de l'ordre produit. Par notre choix de G' et H', H et H' d'une part, G/H et G'/H' d'autre part, sont des g.a.o. équivalents; par Feferman et Vaught, on en déduit $(G/H)\times H \equiv (G'/H')\times H'$; ce dernier g.a.o. est isomorphe à G', lui-même équivalent à G, d'où $(G/H)\times H \equiv G$.

<u>Définition</u>. Pour $i \leq \omega$, appelons <u>i-groupe</u> un g.a.o. G admettant une famille $(G_n)_{n\leq i}$ de sous-groupes convexes vérifiant

$$G_\circ = G \ , \ G_i = \{0\}$$

pour chaque $n\in i$, $G_n \supset G_{n+1}$ et $G_n/G_{n+1} \equiv \mathbb{Z}$

. si $i = \omega$, alors $\bigcap_{n\in i} G_n = \{0\}$.

Exemple. $\mathbb{Z}^i$.

Lemme 2. Pour $i \in \omega$, G est un i-groupe ssi $G \equiv \mathbb{Z}^i$; les i-groupes constituent donc une classe élémentaire complète.

Démonstration. Soient $(G_n)_{0\leq n\leq i}$ les sous-groupes convexes de $\mathbb{Z}^i$, avec $G_n \cong \mathbb{Z}^{i-n}$; nous montrons d'abord que chaque G_n est définissable dans $\mathbb{Z}^i$. Considérons le sous-ensemble G(a) définissable avec le paramètre a

$$G(a) = \{ x \ ; \ -a < 2x < a \}$$

et le prédicat H

$$H(a) \leftrightarrow [\ G(a) \text{ est un groupe }]$$

Prenons $a \in \mathbb{Z}^i$, $\mathbb{Z}^i \models H(a)$ (par exemple $a \equiv 1$ (modulo G_{n+1}) pour un $n<i$); soit $n \in \{0,\dots i-1\}$ tel que $a \in G_n - G_{n+1}$; G(a) est alors un sous-groupe convexe propre de G_n contenant G_{n+1} donc $G(a) = G_{n+1}$. L'élimination des paramètres se fait sans difficulté: on a l'équivalence, pour $1 \leq n \leq i$, $x \in G_n$ ssi $\mathbb{Z}^i \models \psi_n(x)$ où $\psi_n(x)$ est la formule

$$\exists\, a_1,\dots a_i \ \bigwedge_{j=1}^{i} H(a_j) \wedge [\ G(a_1) \supsetneq G(a_2) \supsetneq \dots \supsetneq G(a_i)\ ] \wedge [\ x \in G(a_n)\ ].$$

Soit maintenant $G \equiv \mathbb{Z}^i$; alors G contient i+1 sous-groupes convexes définissables, lui-même et les sous-groupes définis par les ψ_n , $1 \leq n \leq i$; si $G_n = \{ x \ ; \ G \models \psi_n(x) \}$, on a $G_{n+1}/G_n \equiv \mathbb{Z}$, ce qui prouve que G est un i-groupe.

La réciproque se montre par récurrence sur i,

- si $i = 1$, par définition, un i-groupe est un g.a.o. équivalent à $\mathbb{Z}$,
- si $i > 1$, G_1 est un (i-1)-groupe, donc équivalent à $\mathbb{Z}^{i-1}$ par hypothèse d'induction; par le lemme 1 on a $G \equiv (G/G_1)\times G_1 \equiv \mathbb{Z}\times G_1$ (par Feferman-Vaught) $\equiv \mathbb{Z}^i$.

Remarque. Cette propriété ne s'étend pas aux ω-groupes: deux ω-groupes ne sont en général pas équivalents et un g.a.o. équivalent à un ω-groupe n'en est pas nécessairement un. On peut néanmoins faire la remarque suivante: si G est un ω-groupe et $(G_n)_{n\in\omega}$ ses sous-groupes convexes correspondants ordonnés comme précédemment, chaque G_n est définissable: $x \in G_n$ ssi $G \models \chi_n(x)$ où $\chi_n(x)$ est la formule
$(0 < n < \omega)$

$$\exists\, a_1,\dots a_n \left\{ \begin{array}{l} \bigwedge_{i=1}^{n} H(a_i) \wedge [\ G \supsetneq G(a_1) \supsetneq \dots \supsetneq G(a_n)\ ] \\ \wedge\ \forall a \ \Big[\big[H(a) \wedge [G(a) \supset G(a_n)] \big] \rightarrow \bigvee [G(a) = G(a_i)] \Big] \\ \wedge\ \ [x \in G(a_n)] \end{array} \right.$$

et pour un g.a.o. G' équivalent à G, si $\chi_n(G')$ est l'interprétation de χ_n dans G', les χ_n constituent une famille de sous-groupes convexes emboîtés, le quotient de deux termes successifs étant équivalent à $\mathbb{Z}$; donc si on pose $H = \bigcap_{n\in\omega} \chi_n(G')$, G'/H est un ω-groupe.

Proposition 1. [O]. Si G est un g.a.o. vérifiant $\mathbb{Z}^p \times G \equiv G$ pour un entier $p > 0$, on a $\mathbb{Z} \times G \equiv G$.

Démonstration. Avec ces hypothèses, il existe un ultrafiltre U qu'on peut prendre dénombrablement incomplet, pour lequel on a un isomorphisme de g.a.o. entre $(\mathbb{Z}^p \times G)^U$ et G^U, c'est-à-dire entre $(\mathbb{Z}^p)^U \times G^U$ et G^U. Cela permet de construire une chaîne $(G_n)_{n\in\omega}$ de sous-groupes convexes de G^U et des sous-groupes Z_n de G^U vérifiant, en tant que g.a.o.

$$G_n \cong G^U$$

$$G_n = Z_n \times G_{n+1}$$

$$Z_n \cong (\mathbb{Z}^p)^U .$$

Chaque G_n est définissable: on a $G_n = G(a)$ pour un $a \in G$ comme dans la preuve du lemme 2; $\bigcap_{n\in\omega} G_n$ est un sous-groupe convexe de G et, par le lemme 1, on a

$$G^U \equiv (G^U/\cap G_n) \times (\cap G_n) ;$$

l'application qui à $g \in G^U$ associe $(g_n)_{n\in\omega} \in \Pi Z_n$ définie par les relations, pour tout entier n,

$$g \equiv g_1 + g_2 + \ldots + g_n \ (\text{modulo } G_n)$$

est surjective par ω_1-saturation de G^U et définissabilité des G_n ; elle a pour noyau $\cap G_n$, donc

$$G^U/\cap G_n \equiv \Pi Z_n \cong ((\mathbb{Z}^p)^U)^\omega \equiv (\mathbb{Z}^p)^\omega \cong \mathbb{Z}^\omega$$

$$G^U \equiv \mathbb{Z}^\omega \times (\cap G_n) \cong \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}^\omega \times (\cap G_n)) \equiv \mathbb{Z} \times G^U$$

et enfin $G \equiv \mathbb{Z} \times G$.

2. Application aux corps values

Une référence agréable est le livre de P. Ribenboim [R].

a) Si (K,v) est un corps valué, la connaissance de l'anneau de valuation A_v permet de récupérer v : le groupe vK est le quotient du groupe multiplicatif K^* de K par le sous-groupe des unités U_{A_v} de A_v et v est la projection canonique de K^* sur K^*/U_{A_v}. On définit sur l'ensemble V(K) des valuations sur K un ordre: pour u,v dans V(K), on pose

$$v \leq w \ (\text{"w plus fine que v"}) \text{ ssi } A_v \supset A_w .$$

Dans une telle situation, si on note M_v l'idéal maximal de A_v, on a

$$M_v \subset M_w \subset A_w \subset A_v ,$$

M_v est un idéal premier de A_w et A_v est le localisé de A_w en M_v. Réciproquement si P est un idéal premier de A_w, le localisé de A_w en P est l'anneau d'une valua-