WILFRID HODGES

Groupes nilpotents existentiellement clos de classe fixée

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 16 (1984), p. I-10
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_16__R1_0>

Société Mathématique de France
2° série, mémoire n° 16, 1984, p. 1-10

GROUPES NILPOTENTS EXISTENTIELLEMENT CLOS DE CLASSE FIXEE

Wilfrid Hodges

Résumé. *Nous démontrons que pour chaque $k \geqslant 2$, il y a une famille continupotente de groupes existentiellement clos nilpotents de classe k, telle que si* G *et* H *sont deux groupes distincts dans la famille, alors il existe une proposition du 1er ordre et de la forme $\exists\forall\exists$, qui est vraie dans* G *mais pas dans* H. *La forme $\exists\forall\exists$ est la meilleure possible.*

Summary. *We show that if $k \geqslant 2$, then there is a family of existentially closed nilpotent groups of class k which has the cardinality of the continuum, such that if* G *and* H *are two distinct groups in the family, then there is an $\exists\forall\exists$ first-order sentence which is true in* G *but not in* H. *The form $\exists\forall\exists$ is best possible.*

Soit $\mathcal{N}_k$ la classe des groupes nilpotents de classe k. On dit qu'un groupe $G \in \mathcal{N}_k$ est e.c. (pour existentiellement clos) dans $\mathcal{N}_k$ si pour tout groupe $H \in \mathcal{N}_k$ avec $G \subseteq H$, et tout système fini E d'équations et d'inéquations avec paramètres dans G, si E est satisfait dans H alors E est satisfait dans G.

THEOREME. Pour tout $k \geqslant 2$, il y a 2^ω groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$, G_α $(\alpha < 2^\omega)$, tels que si $\alpha \neq \beta$, alors il existe une proposition ϕ de la forme $\exists\forall\exists$ qui est vraie dans G_α mais pas dans G_β. (La forme $\exists\forall\exists$ est $\exists\bar{x}\forall\bar{y}\exists\bar{z}\psi$ avec ψ sans quanteurs.)

On sait déjà: (1) Le théorème est vrai avec 2 pour 2^ω (Saracino [10]). (2) Il y a 2^ω groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$, G_α $(\alpha < 2^\omega)$, tels que si $\alpha \neq \beta$ alors $G_\alpha \not\equiv G_\beta$ (Hodges [6]). (3) Si G, H sont e.c. dans $\mathcal{N}_k$, alors pour toute proposition ϕ de la forme $\forall\exists$, ϕ est vraie ou bien dans G et H, ou bien dans aucun des deux (cf. Prop. 1.14 dans Hirschfeld & Wheeler [5]). (Voir aussi Maier [9].) Le théorème remplit la lacune entre ces résultats. Au même temps sa démonstration

0037-9484/84 03 01 10/$ 3.00/

donne quelque substance algébrique au résultat (2).

Pour les groupes e.c., au lieu des groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$, le théorème au-dessus est un résultat bien connu de Belegradek [3] et Ziegler [12]. Pour les groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$ qui sont périodiques, le théorème est tout à fait faux. Il n'y a qu'un groupe dénombrable et périodique qui soit e.c. dans $\mathcal{N}_2$ (Theorem 3.5 de Saracino & Wood [11], cf. aussi Apps [1].

Nous procédons en deux coups. La première étape, c'est de bâtir 2^{ω} groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$ qui "représentent" différents ensembles d'entiers. Et puis au second coup nous trouvons des formules ϕ_X qui expriment qu'un ensemble X est représenté dans un groupe e.c. Nous écrivons G' pour le sousgroupe dérivé de G. $[x_1,\ldots,x_n]$ est le commutateur $[\ldots[x_1,x_2],x_3\ldots,x_n]$ de poids n. G*H est le produit libre de G et H dans le sens de $\mathcal{N}_k$. Pour plusiers détails je renvoie à Hodges [6]. Nous fixons $k \geqslant 2$.

1. Construction d'un ensemble continupotent de groupes e.c. dans $\mathcal{N}_k$

LEMME 1. Soient p un nombre premier, $G \in \mathcal{N}_k$ et b un élément de G. Alors (a), (b) sont équivalents:

(a) Il y a un groupe $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$, avec des éléments $h_2, \ldots, h_k$ tels que $[b,h_2,\ldots,h_k] \neq 1$ et $h_k^p = 1$.

(b) Dans G il n'y a pas d'élément a tel que $a^p b^{-1} \in G'$.

Démonstration. Soit F le groupe k-nilpotente libre de générateurs $x_2, \ldots, x_{k-1}$. Considérons $K = G*F*Z_p$, où x_k engendre le groupe cyclique Z_p d'ordre p. La condition (a) est équivalente à

$$(1) \qquad [b,x_2,\ldots,x_k] \neq 1.$$

Supposons d'abord que (b) soit fausse. Prenant a tel que $a^p b^{-1} = c \in G'$, nous avons par les lois de $\mathcal{N}_k$:

$$[b,x_2,\ldots,x_k] = [c^{-1}a^p,x_2,\ldots,x_k] = [a,x_2,\ldots,x_{k-1},x_k^p] = 1,$$

qui contredit (1). Puis supposons que (1) soit fausse. Alors d'après des faits connus sur $\mathcal{N}_k$, puisque aucun des $x_2, \ldots, x_k$ n'est de la forme y^p modulo K', b est de cette forme modulo G'. (Cf. Lemma 2(a) de Hodges [6].) □

D'après le lemme 1, nous avons:

LEMME 2. Soit G e.c. dans $\mathcal{N}_k$, soit b un élément de G et soit p un nombre premier. Alors les conditions suivantes sont équivalents:

(a) b est de la forme a^p modulo G'.

(b) $G \models \forall x_2 \ldots x_k (x_k^p = 1 \to [b, x_2, \ldots, x_k] = 1)$. □

Maintenant soient $G \in \mathcal{N}_k$, b un élément de G et X un ensemble de nombres premiers. Nous disons que b <u>représente</u> X dans G si pour tout nombre premier p,

(2) $\quad p \in X \Rightarrow b$ est de la forme a^p modulo G', et

(3) $\quad p \notin X \Rightarrow$ il y a $h_2, \ldots, h_k \in G$ avec $h_k^p = 1$ et $[b, h_2, \ldots, h_k] \neq 1$.

Puisque les seconds membres de (2), (3) sont existentielles, il est clair que si b représente X dans G, alors b représente X aussi dans chaque $H \supseteq G$, $H \in \mathcal{N}_k$.

L'ensemble X de nombres premiers étant donné, nous construisons un groupe G_X avec un élément g_1^X qui représente X, comme suit. Soit Q_X le groupe des nombres rationnels q tels que si un nombre premier p divise le dénominateur de q, alors $p \in X$. Soit g_1^X le nombre 1 dans Q_X. Soit F le groupe libre $\in \mathcal{N}_k$ sur $k-1$ générateurs $g_2^X, \ldots, g_k^X$. (Les éléments $g_2^X, \ldots, g_{k-1}^X$ suffisent ici, mais on a besoin de g_k^X plus tard.) Soit B_X le groupe $\bigoplus \{Z_p : p$ premier $\notin X\}$. Alors G_X sera $Q_X * F * B_X$. On voit que g_1^X représente X dans G_X (c'est le Lemma 5 de Hodges [6]).

Notre but est de construire un groupe e.c. dans $\mathcal{N}_k$, dans lequel certains ensembles récursifs de nombres premiers sont représentés, et certains autres ne le sont pas. Pour ceci nous employons le forcing fini de Abraham Robinson (Barwise & Robinson [2]), pour omettre les ensembles que nous voulons laisser. Il faut ajouter quelques items aux définitions de Barwise & Robinson. Par exemple, dans le forcing correspondant à une théorie T, si ϕ_i $(i < \omega)$ sont des propositions universelles du premier ordre, alors une condition π force $\bigwedge_{i<\omega} \phi_i$ ssi $T \cup \pi \vdash \phi_i$ pour tout $i < \omega$. (Pour justifier cela, et pour d'autres faits sur le forcing que nous ne démontrons pas ici, voir Hodges [7] ou Ziegler [12].) Nous écrivons A pour le modèle construit par forcing.

Soit E un ensemble dénombrable d'ensembles infinis de nombres premiers. Nous écrivons G_E pour la somme directe $\bigoplus \{G_X : X \in E\}$. Alors G_E est dénombrable. Soit Δ_E le diagramme de G_E, et soit T la théorie de $\mathcal{N}_k$.

LEMME 3. Dans le forcing correspondant à $T \cup \Delta_E$, la condition $\emptyset$ force que le modèle A construit soit un groupe e.c. dans $\mathcal{N}_k$ contenant G_E comme sousgroupe. □

Or, grâce aux lemmes 2, 3, la propriété "c est de la forme a^p modulo A'" équivaut (pour A) à

$$(4) \qquad \forall x_2 \ldots x_k (x_k^p = 1 \rightarrow [c, x_2, \ldots, x_k] = 1).$$

On remarque que (4) est une proposition universelle, et de là, si π est une condition de forcing qui force (4), alors $T \cup \Delta_E \cup \pi$ l'implique. Le même est vrai pour la propriété "c n'est pas de la forme a^p modulo A'", utilisant un nombre infini de propositions universelles.

LEMME 4. Dans le forcing correspondant à $T \cup \Delta_E$, soit c une constante de forcing (un témoin), soit π une condition, et soit Y un ensemble infini de nombres premiers, tel qu'il existe une infinité de nombres premiers $\notin$ Y. Alors si π force "c représente Y", il y a $X \in E$ tel que $Y \setminus X$ soit fini.

<u>Démonstration</u>. Soient c, $d_1, \ldots, d_m$ les constantes de forcing qui apparaissent dans π. Soit K le groupe $\in \mathcal{N}_k$ présenté par l'ensemble d'equations dans $\Delta_E \cup \pi$. Puisque π est une condition, $T \cup \Delta_E \cup \pi$ a un modèle, d'où $\Delta_E \cup \pi$ toute entière est vérifiée dans K. Alors $G_E \subseteq K$ sans perte de généralité, et K est engendré sur G_E par c, $d_1, \ldots, d_m$. Or pour chaque $p \in Y$, soit θ_p la proposition (4). Alors $T \cup \Delta_E \cup \pi \vdash \theta_p$, d'ou nous deduirons que si $H \supseteq K$, $H \in \mathcal{N}_k$, alors $H \models \theta_p$ aussi. D'après le lemme 1 il suit que c est de la forme a^p modulo K' pour chaque $p \in Y$. Mais pareillement si q est un nombre premier $\notin$ Y, alors c n'est pas de la forme a^q modulo K'.

Passons maintenant à K/K'. Soit a^* l'image dans K/K' d'un élément a de K. Alors K/K' est un groupe abélien finiment engendré sur G_E/G_E' par les generateurs c^*, $d_1^*, \ldots, d_m^*$. Puisqu'il y a une infinité de nombres premiers qui ne divisent pas c^* dans K/K', c^* est d'ordre infini. Dans $(K/K')/(G_E/G_E')$, qui est une somme directe finie de groupes cycliques, l'image de c^* est divisible par une infinité de nombres premiers. Alors il existe j tel que $jc^* \in G_E/G_E'$.

Or, par la construction de G_E, il y a des ensembles $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}$, des entiers $\ell_1, \ldots, \ell_n \leq k$, et un element t d'ordre fini, tels que

$$(5) \qquad jc^* = \alpha_1 g_{\ell_1}^{X_{i_1}} + \ldots + \alpha_n g_{\ell_n}^{X_{i_n}} + t \quad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}).$$