Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57^{e} année, 2004-2005, n^{o} 942, p. 165 à 197

CORRESPONDANCES DE HECKE, ACTION DE GALOIS ET LA CONJECTURE D'ANDRÉ–OORT
[d'après Edixhoven et Yafaev]

par **Rutger NOOT**

1. INTRODUCTION

Il y a une analogie très forte entre les conjectures de Manin–Mumford et d'André–Oort, dont la première est en effet un théorème dû à Raynaud. Dans les deux cas, on considère une certaine classe de variétés algébriques : les variétés abéliennes dans la première et les variétés de Shimura dans la deuxième conjecture. Dans chaque cas, on définit ensuite la notion de sous-variété (irréductible) *spéciale*. Dans le cas de variétés abéliennes, on parlera de *sous-variétés de torsion*, dans le cas des variétés de Shimura de *sous-variétés de type Hodge*. Une sous-variété spéciale de dimension nulle est un *point spécial*. Les définitions, dans le cas des variétés de Shimura, peuvent être consultées dans les paragraphes 2.1 et 2.2, l'analogie avec la conjecture de Manin–Mumford sera expliquée en détail dans 3.1. Les deux conjectures s'énoncent alors de la manière suivante.

Conjecture 1.1 (*cf.* Conjecture 2.3). — *Soient S une variété de l'espèce considérée et $\Sigma \subset S$ un ensemble de points spéciaux. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de Σ sont des sous-variétés spéciales de S.*

On reviendra plus tard, dans les paragraphes 3.1 et 5.1, sur l'analogie entre ces deux conjectures. La suite de cette introduction sera consacrée au cas le plus simple où la conjecture d'André–Oort n'est pas triviale. Cet exemple sera développé, dans le langage plus savant des variétés de Shimura, dans le paragraphe 5.2.

Soit $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ le *demi-plan de Poincaré*. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ opère sur $\mathbb{H}$ par les transformations de Moebius. Cette action est transitive et induit une action fidèle de groupe quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$. On obtient une action de $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ et on peut montrer que le quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ est une variété analytique. C'est le

L'auteur a bénéficié du soutien du programme MRTN de l'Union Européenne, dans le cadre du réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat MRTN-CT2003-504917).

premier exemple d'une variété de Shimura. La fonction modulaire $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ (dont on peut trouver la définition dans [36, Chap. VII] par exemple) est Γ-invariante et elle induit un isomorphisme $\Gamma\backslash\mathbb{H} \cong \mathbb{C}$. Un élément z du quotient $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ est dit *spécial* si c'est la classe d'un élément $\tau \in \mathbb{H}$ qui est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré 2, donc nécessairement quadratique imaginaire. On note que cette condition ne dépend pas du représentant τ choisi. De même, un point $z \in \mathbb{C}$ est *spécial* si c'est l'image d'un élément spécial de $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ sous l'isomorphisme ci-dessus. Dans ce cas, on dit aussi que z est un invariant modulaire *singulier*. Les points spéciaux de $\mathbb{C}$ sont donc les nombres $j(\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{H}$ quadratique imaginaire. On peut montrer, et cela traduit un principe général dans la théorie de variétés de Shimura, que tout point spécial de $\mathbb{C}$ est un nombre algébrique.

La théorie présentée ci-dessus possède une interprétation naturelle en termes de courbes elliptiques. Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, le quotient $E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ est une courbe elliptique complexe et toute courbe elliptique sur $\mathbb{C}$ est isomorphe à une courbe de cette forme. Deux courbes E_τ et $E_{\tau'}$ sont isomorphes si et seulement si $j(\tau) = j(\tau')$, de sorte que l'invariant modulaire $j(\tau)$ définit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de courbes elliptiques complexes et $\mathbb{C}$. En plus, pour $F \subset \mathbb{C}$ algébriquement clos, une courbe elliptique peut être définie sur F si et seulement si son invariant modulaire appartient à F. Une courbe elliptique est de *type CM* si son anneau d'endomorphismes $\mathrm{End}(E_\tau)$ n'est pas réduit à $\mathbb{Z}$. Pour la courbe E_τ (avec $\tau \in \mathbb{H}$) cela est le cas si et seulement si τ est quadratique imaginaire et $\mathrm{End}(E_\tau)$ est alors un ordre dans le corps $\mathbb{Q}(\tau)$. Les points spéciaux de $\mathbb{C}$ sont donc les points correspondant aux courbes elliptiques de type CM. Comme une courbe de type CM peut être définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, cela implique que les points spéciaux de $\mathbb{C}$ sont algébriques.

La conjecture d'André–Oort étant triviale pour la variété de Shimura que l'on vient d'introduire, on va considérer dans la suite le produit de cette variété avec elle-même, c'est-à-dire qu'on regarde $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ comme quotient de $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ sous l'action de $\Gamma \times \Gamma$. Les points spéciaux sont alors les $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ avec z et z' spéciaux. La seule sous-variété de $\mathbb{C}^2$ de dimension 2 est $\mathbb{C}^2$ et celle-ci est de type Hodge.

On distingue deux types de courbes (irréductibles) dans $\mathbb{C}^2$ de type Hodge. La courbe $\{z\}\times\mathbb{C}$ resp. $\mathbb{C}\times\{z'\}$ est de type Hodge si et seulement si z, resp. z', est spécial. Pour tout entier N, il existe une courbe de type Hodge $\widetilde{Y}_0(N) \subset \mathbb{C}^2$ du deuxième type : $\widetilde{Y}_0(N)$ est l'image de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$ sous l'application $\tau \mapsto (j(N\tau), j(\tau))$. Pour montrer que cette image est bien une courbe algébrique on utilise le fait que l'application $\tau \mapsto (j(N\tau), j(\tau))$ se factorise par le quotient de $\mathbb{H}$ pour un sous-groupe arithmétique de Γ. Le fait que cette définition *ad hoc* coïncide avec la définition donnée dans 2.2 est (mal) justifié dans le paragraphe 5.2 (alinéa suivant le théorème 5.3) et aussi (beaucoup mieux) dans Edixhoven [18, § 2]. Notons aussi que $\widetilde{Y}_0(N)$ est seulement birationnellement équivalente à la courbe modulaire $Y_0(N)$.

Maintenant qu'on sait ce que veut dire la conjecture d'André–Oort pour $\mathbb{C}^2$, passons aux résultats connus dans ce cas. Pour la variété de Shimura $\mathbb{C}^2$, la conjecture 1.1

a été prouvée par André [4] sous une condition supplémentaire sur l'ensemble Σ et indépendamment par Edixhoven [16] sous l'hypothèse de Riemann généralisée. André [5] a ensuite réussi à enlever la condition sur Σ, donnant une démonstration inconditionnelle dans ce cas. La démonstration d'Edixhoven est reprise dans [18], qui donne aussi une variante (corollaire du théorème 7.1) où l'hypothèse de Riemann a été remplacée par une condition sur Σ. Dans le paragraphe 5.2 on reviendra sur les idées de la démonstration d'André. Quant à la démonstration d'Edixhoven, celle-ci a été généralisée par Edixhoven et Yafaev et s'applique maintenant, toujours sous des conditions supplémentaires, à beaucoup d'autres variétés de Shimura. Elle fait l'objet de la section 7.

On termine l'introduction en donnant les idées principales de cette méthode, appliquée au cas de $\mathbb{C}^2$. Il est suffisant de montrer que toute courbe algébrique irréductible $Z \subset \mathbb{C}^2$ contenant un ensemble infini Σ de points spéciaux est de type Hodge. Soit Z une telle courbe. Comme les points spéciaux sont algébriques, la courbe Z est définie sur un corps de nombres F, c'est-à-dire que c'est une courbe $Z \subset \mathbb{A}^2_F$. Si une des deux projections de Z est réduite à un point, alors ce point est spécial et l'énoncé est trivialement vérifié. On peut donc se borner au cas contraire où il faut montrer que $Z = \widetilde{Y}_0(N)$ pour un certain entier N. Supposons que cela ne soit pas le cas et essayons d'en déduire une contradiction.

Pour tout entier m, la courbe $\widetilde{Y}_0(m) \subset \mathbb{C}^2$ est une correspondance $T_m\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, agissant sur les sous-ensembles $X \subset \mathbb{C}$ par $T_m X = \pi_2(\pi_1^{-1}(X))$, où les $\pi_i\colon \widetilde{Y}_0(m) \to \mathbb{C}$ sont les restrictions des projections $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$. Le produit $T_{m,m} = T_m \times T_m\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est alors aussi une correspondance. Il suffit de trouver un nombre premier p tel que $T_{p,p}Z = Z$. En effet, si $T_{p,p}Z = Z$, alors la $T_{p,p}$-orbite de tout élément de Z est contenue dans Z. Comme toutes les $T_{p,p}$-orbites sont denses dans $\mathbb{C}^2$, cela implique que $Z = \mathbb{C}^2$, contredisant le fait que Z est une courbe. La conjecture est alors prouvée pour $\mathbb{C}^2$.

Il reste à trouver le nombre premier p avec cette propriété miraculeuse. L'argument se déroule en trois étapes.

1. On montre que si l'intersection $Z \cap T_{p,p}Z$ est finie, alors son ordre est majoré par $c(p+1)^2$ (pour une constante $c > 0$).
2. Le fait que $Z \neq \widetilde{Y}_0(N)$ pour tout N implique, via un théorème d'André sur le groupe de monodromie algébrique, que $T_{p,p}Z$ est irréductible pour $p > M$, avec M assez grand. On utilise ici un cas particulier du théorème 7.5.
3. On se sert d'une description explicite de l'action du groupe de Galois absolu Γ_F de F sur les points spéciaux pour montrer qu'il existe un $z \in \Sigma$ et un nombre premier $p > M$ tels que $T_{p,p}z$ contient un conjugué galoisien de z et tels que l'ordre de la Γ_F-orbite de z est supérieur à $c(p+1)^2$.

La dernière étape nécessite une version effective du théorème de Chebotarev qui n'a été prouvé que sous l'hypothèse de Riemann généralisée, ce qui explique que le résultat dépend de GRH. Alternativement, une condition assez forte sur les points spéciaux dans Σ implique aussi l'existence de z et p, voir le théorème 7.1 et sa démonstration. Il faut aussi souligner que $T_{p,p}\widetilde{Y}_0(N)$ n'est irréductible pour aucun nombre premier p et entier $N > 0$, donc l'hypothèse que Z ne soit pas une courbe modulaire est essentielle dans la deuxième étape.

Comme Z et $T_{p,p}Z$ sont définis sur F, la dernière étape implique que $Z \cap T_{p,p}Z$ contient toute l'orbite $\Gamma_F \cdot z$. En combinant la minoration de l'ordre de cette orbite avec la majoration de l'intersection établie dans la première étape on déduit que $Z \cap T_{p,p}Z$ est infini. Comme Z et $T_{p,p}Z$ sont irréductibles on conclut que $Z = T_{p,p}Z$.

Remerciements. — Je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans la préparation de cet exposé et en particulier Bas Edixhoven pour sa relecture rapide et minutieuse du manuscrit.

2. LA CONJECTURE

2.1. Variétés de Shimura

Une variété de Shimura connexe est un quotient d'un domaine hermitien symétrique par l'action d'un groupe arithmétique. Une variété de Shimura générale est une réunion disjointe de variétés de Shimura connexes. Même si la conjecture d'André–Oort peut s'énoncer dans toute sa généralité pour les variétés de Shimura connexes, on utilisera le langage adélique de Deligne [14] et [15] parce que c'est le cadre naturel pour introduire les opérateurs de Hecke et les lois de réciprocité. Pour les détails du résumé succinct suivant, le lecteur est renvoyé aux deux articles de Deligne. Les notations introduites resteront en vigueur dans tout ce texte.

Notons $\mathbb{C}^\times = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_m$ le tore sur $\mathbb{R}$ obtenu par restriction de scalaires. Ce tore est caractérisé par la propriété que $\mathbb{C}^\times(A) = (\mathbb{C} \otimes A)^\times$ pour toute $\mathbb{R}$-algèbre A. Une *donnée de Shimura* est un couple (G, X), où G est un groupe linéaire algébrique réductif sur $\mathbb{Q}$ et $X \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}-\mathrm{grp}}(\mathbb{C}^\times, G_{\mathbb{R}})$ une $G(\mathbb{R})$-classe de conjugaison telle que les conditions habituelles [15, 2.1.1.{1,2,3}] soient vérifiées. Pour la suite, on fixe une donnée de Shimura (G, X). Les composantes connexes de X sont alors des (produits de) domaines hermitiens symétriques, en particulier X possède une structure complexe naturelle. Il est clair que les composantes de X sont toutes isomorphes entre elles et on en fixe une, notée X^+.

Soit $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}_f$) l'anneau des adèles (finis) de $\mathbb{Q}$, de sorte que $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$ et $\mathbb{A}_f = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ où $\widehat{\mathbb{Z}}$ est le complété profini de $\mathbb{Z}$. Pour tout sous-groupe compact ouvert $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ on considère le quotient

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\, (X \times G(\mathbb{A}_f)/K)\,,$$

où $G(\mathbb{Q})$ opère sur X par conjugaison (c'est-à-dire par composition avec des automorphismes intérieurs) et sur $G(\mathbb{A}_f)/K$ par translation à gauche. Chaque composante connexe de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est isomorphe à un quotient de X^+ par l'action d'un groupe arithmétique. Plus précisément, soient $G(\mathbb{R})^+$ la composante connexe de $G(\mathbb{R})$ pour la topologie euclidienne et $G(\mathbb{Q})^+ = G(\mathbb{Q})\cap G(\mathbb{R})^+$, alors $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est une réunion disjointe finie de quotients $\Gamma_g\backslash X^+$ avec $g \in G(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma_g = gKg^{-1}\cap G(\mathbb{Q})^+$. Ce quotient $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est un espace analytique et il résulte d'un théorème de Baily et Borel que c'est la variété des points complexes d'une variété algébrique complexe quasi projective $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Cette variété est lisse pour K, et donc les Γ_g, assez petits. Cela est le cas en particulier si les Γ_g sont sans torsion.

Les variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ forment un système projectif indexé par les sous-groupes compacts ouverts $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ et leur limite projective est un $\mathbb{C}$-schéma $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$ avec une action continue du groupe $G(\mathbb{A}_f)$. L'action de $g \in G(\mathbb{A}_f)$ sera notée

$$\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot\, g} \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}. \tag{1}$$

Par construction de $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$, la variété $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est le quotient de $\mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}$ par l'action de K. Dans 6.2 on reviendra plus amplement sur cette action de $G(\mathbb{A}_f)$.

2.2. Sous-variétés de type Hodge et points spéciaux

On définit de façon évidente la notion de morphisme $f\colon (H,Y)\to(G,X)$ de données de Shimura. Un tel morphisme induit un morphisme de schémas

$$\mathrm{Sh}(f)\colon \mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}}. \tag{2}$$

Une sous-variété irréductible fermée $Z \subset \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$ est appelée une *sous-variété de type Hodge* s'il existe un morphisme $f\colon (H,Y)\to(G,X)$ de données de Shimura et un élément $g \in G(\mathbb{A}_f)$ tels que Z soit une composante irréductible de l'image d'un morphisme composé

$$\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{Sh}(f)} \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cdot\, g} \mathrm{Sh}(G,X)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}. \tag{3}$$

Il n'est pas difficile de montrer (voir 6.2 pour plus de détails) que l'image d'une telle application est une sous-variété fermée, pas nécessairement irréductible, de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Chaque composante irréductible de l'image de $\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}}$ est l'image d'une composante connexe de $\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}}$.

Dans le cas particulier où H est un tore, la variété $\mathrm{Sh}(H,Y)_{\mathbb{C}}$ est de dimension nulle, donc les sous-variétés de type Hodge obtenues à partir de la construction précédente appliquée à (H,Y) sont des points. Les points obtenus de cette manière sont les *points spéciaux* de $\mathrm{Sh}_K(G,X)_{\mathbb{C}}$. Les conditions imposées à une donnée de Shimura (H,Y) impliquent que les points spéciaux d'une variété de Shimura sont exactement les sous-variétés de type Hodge de dimension nulle. Une caractérisation équivalente des points spéciaux est obtenue en utilisant la notion de groupe de Mumford–Tate.