326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(987) *Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes*

Pierre CARTIER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2008
60e année, 2007–2008, no 987, p. 165 à 196

GROUPOÏDES DE LIE ET LEURS ALGÉBROÏDES

par **Pierre CARTIER**

INTRODUCTION

Pourquoi des groupoïdes et des algébroïdes, aux noms si laids ? La première apparition des groupoïdes est due à Brandt [**3**], et se rapporte à des problèmes d'arithmétique non-commutative. Si K est un corps de nombres algébriques, de degré fini sur le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, on appelle ordre dans K tout sous-anneau $\mathcal{O}$, engendrant K comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, et de type fini comme $\mathbb{Z}$-module. Il existe un plus grand ordre $\mathcal{O}_K$, et les idéaux (fractionnaires) pour $\mathcal{O}_K$ forment un groupe multiplicatif, découvert par Kummer et Dedekind. Lorsque K est un corps non-commutatif (ou même plus généralement une algèbre simple sur $\mathbb{Q}$), de degré fini sur $\mathbb{Q}$, la définition d'un ordre demeure inchangée, et il existe des ordres maximaux. Les idéaux par rapport à l'un de ces ordres maximaux forment encore un groupe multiplicatif. Mais il existe plusieurs ordres maximaux, et la structure multiplicative des idéaux, pour tenir compte de la multiplicité des ordres maximaux, s'exprime par une espèce de groupe à plusieurs unités, et à multiplication associative partiellement définie, un *groupoïde*.

Cette structure exotique ne reçut guère d'attention jusque vers 1950. Après l'invention des catégories, on remarqua qu'un groupoïde est une (petite) catégorie dont toutes les flèches sont inversibles, et qu'un groupoïde à un seul objet est un groupe. Les foncteurs entre groupoïdes généralisent les homomorphismes entre groupes, mais dans le monde des catégories, il faut distinguer les isomorphismes (*stricto sensu*) des équivalences (dites faibles après Moerdijk [**27**]). On montre facilement qu'un groupoïde transitif[1] est faiblement équivalent à un groupe, mais ceci est trompeur.

[1] Où tous les objets sont isomorphes.

Vu la signification épistémologique des catégories, codifiant les objets d'une structure (groupes, variétés, etc.) les objets apparaissent isolés, et pour chaque couple d'objets x, y d'une catégorie $\mathscr{C}$, on a l'ensemble $\mathscr{C}(x, y)$ des flèches de x vers y. La définition d'un foncteur se fait aussi objet par objet. Pour aborder les problèmes de variation de structures, par exemple les diverses structures complexes sur une variété réelle, il faut « souder » les objets. Du coup, une catégorie $\mathscr{C}$ est formée de deux ensembles $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ correspondant aux objets et aux flèches respectivement, et la structure d'une catégorie est définie par des applications entre des ensembles construits par produits fibrés à partir de $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Alors, on peut enrichir $\mathscr{C}$ en munissant $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$ de diverses structures (topologiques, différentielles, etc.).

Le premier mathématicien à suivre cette direction fut Charles Ehresmann (vers 1950) suivi de ses élèves André Haefliger et Jean Pradines. Ehresmann était un géomètre et il voulait construire des groupoïdes géométriques pour étudier les espaces fibrés, les revêtements et les feuilletages. Un peu plus tard, Alain Connes [**5**] introduisit l'algèbre non-commutative de convolution d'un groupoïde, et ceci conduisit à considérer l'espace des feuilles d'un feuilletage comme un espace non-commutatif.

Un problème récurrent est l'étude d'espaces trop singuliers pour être des variétés, comme on en rencontre dans les problèmes de variation de structures : « orbifolds », variétés transverses, espace de feuilles d'un feuilletage... On s'est peu à peu aperçu que la classification de tels espaces se fait au moyen de groupoïdes topologiques (ou différentiables) définis à équivalence faible près. Déjà, pour définir une variété, il faut se donner un atlas (qui peut se représenter par un groupoïde) et lui permettre de changer à équivalence (faible) près. On arrive donc à une conception de variétés généralisées conçues comme groupoïdes à équivalence faible près. L'équivalence de Morita, familière en algèbre, s'étend aux groupoïdes topologiques, et a été appliquée aux C^*-algèbres par Hilsum et Skandalis [**17**].

Si les groupoïdes différentiables (ou de Lie) généralisent les groupes de Lie, il convient de développer leur théorie infinitésimale. Les algèbres de Lie deviennent des objets de la géométrie différentielle : les *algébroïdes de Lie*, introduits par Pradines [**28**]. La théorie est assez parallèle à celle des groupes et algèbres de Lie, mais une difficulté majeure se présente : démontrer l'analogue du troisième théorème de Lie qui construit un groupe de Lie d'algèbre de Lie donnée. L'histoire mouvementée sera détaillée plus loin ; la solution définitive est très récente et due à M. Crainic et R.L. Fernandes [**7**].

Nous nous attacherons aussi à décrire certaines applications, tels le lien entre variétés de Poisson et groupoïdes symplectiques (étudiée par l'école d'Alan Weinstein) et une nouvelle présentation de la théorie de Galois des équations différentielles linéaires.

Remerciements

Tout d'abord, à mon amie Yvette Kosmann-Schwarzbach, qui m'a introduit à ces sujets et fourni une abondante documentation. Également à I. Moerdijk, J. Mrčun et A. Weinstein pour de nombreuses discussions. Je remercie enfin Ch.-M. Marle pour le prêt de ses notes sur la géométrie de Poisson. Quant à ma vaillante secrétaire Cécile Gourgues, elle était sur le pont avec son sourire coutumier.

1. GROUPOÏDES DE LIE

1.1. Définitions

Soit M_0 un ensemble. Par analogie à la notion de bimodule, appelons *bi-ensemble*[(2)] *de base* M_0, un système d'applications $\mathcal{M} = (M_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M_0)$ où s est appelée la source, et b le but. L'application (b, s) de M_1 dans $M_0 \times M_0$ s'appelle l'*ancre*. Le bi-ensemble unité $U(M_0)$ est défini par $M_1 = M_0$, $s = b = \mathbb{1}_{M_0}$; le produit $\mathcal{M} \underset{M_0}{\times} \mathcal{M}'$ des bi-ensembles $\mathcal{M} = (M_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} M_0)$ et $\mathcal{M}' = (M_1' \underset{b'}{\overset{s'}{\rightrightarrows}} M_0)$ sur la base M_0 est défini comme l'ensemble M'' produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[dr, "s"'] & & M_1' \arrow[dl, "b'"] \\ & M_0 & \end{tikzcd}$$

noté $M_1 {}_s\times_{b'} M_1'$ et formé des paires (μ, μ') dans $M_1 \times M_1'$ telles que $s(\mu) = b'(\mu')$, avec les applications $s''(\mu, \mu') = s'(\mu')$, $b''(\mu, \mu') = b(\mu)$.

Un *monoïde en bi-ensembles* est défini par la donnée d'un bi-ensemble $\mathcal{M}$, d'une loi de composition

$$m : \mathcal{M} \underset{M_0}{\times} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

et d'une unité

$$e : U(M_0) \to \mathcal{M}\,.$$

On impose la commutativité des diagrammes qui correspondent à l'associativité, et l'élément neutre. *Un groupe en bi-ensembles* est un monoïde en bi-ensembles $\mathcal{G} = (G_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} G_0)$ qui possède une inversion $I : G_1 \to G_1$ telle que $s \circ I = b$, $b \circ I = s$ et qui satisfait à la propriété traduisant l'équation $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ dans un groupe.

(2) Ce néologisme sert à rappeler cette analogie. Une terminologie plus usuelle est celle de graphe (orienté), où M_0 est l'ensemble des sommets, M_1 celui des arêtes, l'arête a allant de sa source $s(a)$ à son but $b(a)$.

Plus couramment, un monoïde (resp. groupe) en bi-ensembles est appelé une (petite) *catégorie* (resp. un *groupoïde*). Ces définitions alambiquées ont le mérite de s'étendre telles quelles au cas où les ensembles sont remplacés par des objets d'une catégorie, tels que les espaces topologiques, ou les variétés (différentiables, analytiques réelles ou complexes, algébriques...). On peut ainsi parler de catégorie (ou de groupoïde) topologique, différentiable... La seule difficulté est l'existence des produits fibrés :

- $M_2 := M_1 \, {}_s\!\times_b \, M_1$ pour définir la multiplication,
- $M_3 := M_1 \, {}_s\!\times_b \, M_1 \, {}_s\!\times_b \, M_1$ pour énoncer l'associativité.

Pas de difficulté pour les espaces topologiques.

Pour les variétés, on utilise deux variantes. Rappelons d'abord qu'une application $f : M \to M'$ de classe C^∞ entre variétés est dite *étale* (resp. *submersive*) si pour tout point m de M, l'application tangente $T_m\, f : T_m\, M \to T_{f(m)}\, M'$ est bijective (resp. surjective). Dans la définition d'un groupoïde différentiable[3] $\mathscr{G}$ on supposera que s et b sont des submersions. D'après des résultats classiques, ceci assure que G_2 est une sous-variété localement fermée de $G_1 \times G_1$. Idem pour G_3 et même pour la sous-variété G_p de $G_1 \times \ldots \times G_1$ (p facteurs) définie de manière analogue. Un groupoïde de Lie est dit *étale*[4] si les applications s et b sont étales.

Il convient de définir les morphismes de groupoïdes. Soient $\mathscr{G} = (G_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} G_0)$ et $\mathscr{H} = (H_1 \underset{b}{\overset{s}{\rightrightarrows}} H_0)$ deux groupoïdes. Un morphisme ϕ de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{G}$ est donné par deux applications $\phi_i : H_i \to G_i$ (pour $i = 0, 1$) compatibles avec source, but, composition, unité et inversion en un sens évident. Dans le cas des groupoïdes de Lie, on impose en plus que ϕ_0 et ϕ_1 soient des morphismes de variétés.

1.2. Exemples de groupoïdes de Lie

a) Tout d'abord, pour toute variété M, on a défini le bi-ensemble $U(M) = (M \underset{\mathrm{I\!I}}{\overset{\mathrm{I\!I}}{\rightrightarrows}} M)$. C'est de manière naturelle un groupoïde avec l'unité $e_x = x$ et la multiplication

$$e_x \cdot e_x = e_x \tag{1.1}$$

pour tout x dans M. On l'appelle le *groupoïde unité* de M.

Un autre groupoïde $V(M)$ associé à M est défini par

$$M_0 = M\,, \quad M_1 = M \times M\,, \quad s = pr_2\,, \quad b = pr_1\,,$$

---

(3) Un groupoïde différentiable est dit aussi « groupoïde de Lie ».

(4) Vu la correspondance entre faisceaux et espaces étalés, les groupoïdes étales forment une généralisation des *pseudo-groupes* étudiés par E. Cartan et Ch. Ehresmann : transformations locales d'un ouvert sur un ouvert, inversibles, et se composant.