352 ASTÉRISQUE

2013

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2011/2012
EXPOSÉS 1043-1058

(1048) *Multizêtas, d'après Francis Brown*

Pierre DELIGNE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Janvier 2012
64e année, 2011-2012, n° 1048, p. 161 à 185

MULTIZÊTAS, D'APRÈS FRANCIS BROWN

par **Pierre DELIGNE**

0. INTRODUCTION

Soient $k \geq 0$ et $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ une suite de k entiers ≥ 1. Le nombre multizêta $\zeta(\mathbf{s})$ est la somme itérée (l'appellation est expliquée en 1.1)

$$\zeta(\mathbf{s}) := \sum_{n_1 > \cdots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}} \tag{0.1}$$

(somme sur les suites strictement décroissantes de k entiers > 0). Pour $k = 0$, cette définition donne $\zeta(\mathbf{s}) = 1$. Pour $k \geqslant 1$, la somme (0.1) converge si et seulement si $s_1 \geqslant 2$. Nous ne considérerons que les $\zeta(\mathbf{s})$ *convergents*, i.e. tels que (0.1) converge.

Le produit de deux nombres multizêtas est une combinaison linéaire à coefficients entiers de nombres multizêtas. Voir 3.6. Il revient donc au même de déterminer les relations polynomiales à coefficients rationnels entre les nombres multizêtas, ou de déterminer les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre eux.

Pour $k = 1$, les $\zeta(\mathbf{s})$ convergents sont les valeurs en les entiers $n \geqslant 2$ de la fonction ζ de Riemann. Euler a montré que pour n pair, $\zeta(n)$ est un multiple rationnel de π^n ([3]). Calculant $\zeta(3)$ avec 10 chiffres significatifs, il a aussi vérifié que $\zeta(3)$ n'était pas le produit de π^3 par un nombre rationnel de petit dénominateur. À la suite d'une correspondance avec Goldbach, Euler a étudié dans [4], pour $k = 2$, la variante des sommes (0.1) dans laquelle on somme sur $n_1 \geqslant n_2$: $\zeta_{\mathrm{Euler}}(s_1, s_2) = \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_1 + s_2)$. Il prouve une série de relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre nombres multizêtas, parmi lesquelles $\zeta(2, 1) = \zeta(3)$. Une de ses motivations était l'espoir d'obtenir des informations sur les valeurs de ζ en les entiers impairs $\geqslant 3$ (voir la fin de sa lettre à Goldbach du 5 janvier 1743).

Le problème de déterminer toutes les relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre nombres multizêtas a deux aspects :

(A) À quelles relations faut-il s'attendre ? Les prouver.

(B) Prouver qu'il n'y en a pas d'autres.

L'évidence disponible, tant numérique que théorique, suggère que toute relation $\mathbb{Q}$-linéaire entre les $\zeta(\mathbf{s})$ est somme de relations *isobares*, i.e. entre $\zeta(\mathbf{s})$ de même *poids* $\sum s_i$. Si on se limite à ne considérer que les relations isobares, on ne sait rien sur le problème (B). Nous ne parlerons que de (A).

F. Brown a défini une classe de relations $\mathbb{Q}$-linéaires entre les $\zeta(\mathbf{s})$, les relations *motiviques*. Plus précisément, il définit une $\mathbb{Q}$-algèbre graduée $\mathscr{M}$, des éléments homogènes $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$ de $\mathscr{M}$, de degré le poids $\sum s_i$ de $\mathbf{s}$, et un homomorphisme real : $\mathscr{M} \to \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{real}(\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})) = \zeta(\mathbf{s})$. L'algèbre $\mathscr{M}$ est en tant qu'espace vectoriel engendrée par les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$. Les *relations motiviques* entre $\zeta(\mathbf{s})$ sont celles qui proviennent de relations entre les $\zeta^{\mathbf{m}}(\mathbf{s})$.

Une variante de la conjecture des périodes de Grothendieck implique que toute relation $\mathbb{Q}$-linéaire entre les $\zeta(\mathbf{s})$ est motivique. Cette prédiction a été vérifiée pour beaucoup des relations connues. Mise en garde : si certaines preuves de relations entre les $\zeta(\mathbf{s})$ sont faciles à relever en une preuve des mêmes relations entre les $\zeta^{\mathbf{m}}(s)$, c'est loin d'être toujours le cas.

THÉORÈME 0.2 (F. Brown [1]). – *Les $\zeta^{\mathbf{m}}(s_1, \ldots, s_k)$ pour lesquels chaque s_i vaut* 2 *ou* 3 *forment une base de $\mathscr{M}$ sur $\mathbb{Q}$.*

Chaque $\zeta(\mathbf{s})$ peut donc être exprimé uniquement, de façon motivique, comme combinaison linéaire à coefficients rationnels de $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ avec $k \geqslant 0$ et chaque $s_i \in \{2, 3\}$. Malheureusement, la preuve de Brown ne fournit pas un algorithme, du moins pas un algorithme utilisable, pour trouver quelle est cette combinaison linéaire. Du théorème 0.2, F. Brown déduit que la catégorie des motifs de Tate mixte sur $\mathbb{Z}$ est engendrée par le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$. Voir 7.18.

Certaines de nos notations diffèrent de celles de [1]. La correspondance entre les notations est involutive : $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ devient $\zeta(s_k, \ldots, s_1)$, la composition des chemins $\alpha\beta$ devient $\beta\alpha$, un monôme en les e_t (resp. une suite de 0 et 1) est à remplacer par le même, lu de droite à gauche, et e_1 est à remplacer par $-e_1$.

1. FORMULE INTÉGRALE

1.1. Soient $\omega_1, \ldots, \omega_N$ des 1-formes sur l'intervalle $[0, 1]$. L'*intégrale itérée* $It\int_0^1 \omega_1, \ldots, \omega_N$ est l'intégrale, sur le simplexe

$$\sigma_N := \{(t_1, \ldots, t_N) \mid 1 \geqslant t_1 \geqslant \cdots \geqslant t_N \geqslant 0\}, \tag{1.1.1}$$

contenu dans le cube $[0,1]^N$, de $\mathrm{pr}_1^*\omega_1 \wedge \mathrm{pr}_2^*\omega_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{pr}_N^*\omega_N$. Soit S l'opération qui à une 1-forme ω attache la fonction $S[\omega](t) := \int_0^t \omega$. L'intégrale itérée $It\int_0^1 \omega_1, \ldots, \omega_N$ peut être construite comme suit : appliquer S à ω_N, multiplier la fonction obtenue par ω_{N-1}, appliquer S, multiplier par $\omega_{N-2}, \ldots$, à la fin, évaluer en 1 :

$$It\int_0^1 \omega_1, \ldots, \omega_N = S[\omega_1.S[\omega_2.\ldots\ S[\omega_N]\cdots]](1). \tag{1.1.2}$$

C'est cette construction qui explique l'appellation « *intégrale itérée* ». Une somme telle que (0.1) admet une description analogue, en terme de l'opérateur $\sum$ qui à une fonction $f(n)$ $(n \geqslant 1)$ attache la fonction $\sum[f](n) := \sum_{m=1}^{n-1} f(m)$; ceci explique l'appellation de « *somme itérée* » donnée à (0.1).

Calculons ainsi l'intégrale itérée

$$It\int_0^1 \underbrace{\frac{dt}{t}, \ldots, \frac{dt}{t}}_{(s_1-1)\text{fois}}, \frac{dt}{1-t}, \underbrace{\frac{dt}{t}, \ldots, \frac{dt}{t}}_{(s_2-1)\text{fois}}, \frac{dt}{1-t}, \ldots, \underbrace{\frac{dt}{t}, \ldots, \frac{dt}{t}}_{(s_k-1)\text{fois}}, \frac{dt}{1-t}. \tag{1.1.3}$$

On a $\frac{dt}{1-t} = \sum_{n\geqslant 0} t^n dt$. Appliquant S terme à terme, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n}$. Multipliant par $\frac{dt}{t}$ et appliquant S, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n^2}$. Itérant (s_k-1) fois, on obtient $\sum_{n\geqslant 1} \frac{t^n}{n^{s_k}}$. Multipliant par $\frac{dt}{1-t} = \sum_{m\geqslant 0} t^m dt$ et appliquant S, on obtient

$$S\Big(\sum_{m\geqslant 0, n\geqslant 1} \frac{t^{m+n}}{n^{s_k}}\,dt\Big) = \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{t^{m+n}}{(m+n)n^{s_k}} = \sum_{m>n>0} \frac{t^m}{mn^{s_k}}\,.$$

Continuant ainsi, on obtient finalement la

Proposition 1.2. — *L'intégrale itérée* (1.1.3) *vaut* $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$.

1.3. Alors que la notion de somme infinie est étrangère à la géométrie algébrique, l'étude d'intégrales de quantités algébriques en est une des sources. C'est grâce à la proposition 1.2 que la géométrie algébrique, plus précisément la théorie des motifs de Tate mixte, est utile à l'étude des nombres multizêtas.

2. GROUPE FONDAMENTAL PRO-UNIPOTENT ET COHOMOLOGIE

2.1. Nous aurons besoin d'une variante $\mathscr{Z}'$ de la série centrale descendante $\mathscr{Z}$ d'un groupe Γ. Pour chaque $i \geqslant 1$, $\Gamma/\mathscr{Z}^i$ est un groupe nilpotent. L'ensemble T_i de ses éléments de torsion est donc un sous-groupe. On définit $\mathscr{Z}'^i$ comme étant l'image inverse de T_i dans Γ. Ci-dessous, nous supposerons toujours Γ de génération finie.

Cette hypothèse implique que les $\mathscr{Z}'^i/\mathscr{Z}'^{i+1}$ sont des groupes abéliens libres de type fini.

Supposons tout d'abord Γ nilpotent sans torsion, i.e. qu'il existe A tel que $\mathscr{Z}'^A = 0$. Pour chaque i ($1 \leqslant i < A$), choisissons une base de $\mathscr{Z}'^i/\mathscr{Z}'^{i+1}$ et relevons-la dans $\mathscr{Z}'^i$. Soient $\gamma_1, \ldots, \gamma_M$ les éléments de Γ obtenus, rangés dans un ordre quelconque, et soit $w(j)$ l'entier i tel que γ_j relève un élément d'une base de $\mathscr{Z}'^i/\mathscr{Z}'^{i+1}$. On vérifie par induction sur A que l'application

$$\mathbb{Z}^M \to \Gamma\colon\ \mathbf{n} \longmapsto \gamma_1^{n_1} \cdots \gamma_M^{n_M}$$

est bijective. Dans un tel « système de coordonnées », la loi de groupe de Γ est donnée par des polynômes à coefficients rationnels et à valeurs entières sur les entiers. Plus précisément, si la coordonnée d'indice j est vue comme étant de poids $w(j)$, la j-ième coordonnée de $\mathbf{m} \circ \mathbf{n}$ est un polynôme de poids $\leqslant w(j)$ en les m_k et n_l.

Les mêmes polynômes définissent un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{Q}$, l'*enveloppe unipotente* Γ^{un} de Γ. Le groupe $\Gamma^{\mathrm{un}}(\mathbb{Q})$ de ses points rationnels est $\mathbb{Q}^M$, muni de la loi de groupe donnée par les mêmes formules que celle de Γ. Le groupe $\Gamma^{\mathrm{un}}(\mathbb{Q})$ est la complétion de Malcev $\Gamma \otimes \mathbb{Q}$ de Γ.

Soient $\mathbb{Q}[\Gamma]$ l'algèbre de groupe de Γ, et I son idéal d'augmentation. Quillen a donné une description élégante de l'algèbre affine $\mathscr{O}(\Gamma^{\mathrm{un}})$ de Γ^{un} : c'est la limite inductive des duaux des $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^N$. Plus précisément, l'inclusion de Γ dans $\mathbb{Q}[\Gamma]$ identifie le dual de $\mathbb{Q}[\Gamma]$ à l'espace des fonctions $\Gamma \to \mathbb{Q}$, et par cette identification le dual de $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^{N+1}$ devient l'espace des polynômes en les n_j de poids $\leqslant N$.

Pour Γ de génération finie quelconque, ce qui précède s'applique aux $\Gamma/\mathscr{Z}'^i$, et on définit Γ^{un} comme étant le schéma en groupe limite projective des $(\Gamma/\mathscr{Z}'^i)^{\mathrm{un}}$. L'algèbre affine de Γ^{un} est encore la limite inductive des duaux des $\mathbb{Q}[\Gamma]/I^N$.

2.2. Soit E un espace topologique raisonnable, par exemple une variété algébrique complexe. On suppose E connexe. Un chemin γ de a à b : $[0,1] \to E$ fournit $\gamma^N\colon\ [0,1]^N \to E^N$ et, par restriction au simplexe σ_N de (1.1.1), une chaîne singulière de E^N qui est un cycle modulo la réunion des $b = x_1$, $x_1 = x_2, \ldots, x_N = a$. La classe d'homologie de ce cycle ne dépend que de la classe d'homotopie de γ.

Faisons $a = b$. Élaborant la construction précédente (cf. [2] §3), on obtient un isomorphisme de $\mathbb{Q}[\pi_1(E,a)]/I^{N+1}$ avec un groupe d'homologie relative de E^N et, de son dual $(\mathbb{Q}[\pi_1(E,a)]/I^{N+1})^\vee$ avec un groupe de cohomologie relative de E^N. De là, par passage à la limite inductive, une description cohomologique de l'algèbre affine de $\pi_1(E,a)^{\mathrm{un}}$.

Ne supposons plus que $a = b$. Soit $\pi_1(E;b,a)$ l'ensemble des classes d'homotopie de chemins de a à b. Le groupe $\pi_1(E,a)$ agit à droite, par composition des chemins, sur $\pi_1(E;b,a)$. Cette action fait de $\pi_1(E;b,a)$ un espace principal homogène, nous préférons dire *torseur*, sous $\pi_1(E,a)$. On note $\pi_1(E;b,a)^{\mathrm{un}}$ le $\pi_1(E,a)^{\mathrm{un}}$ torseur qui s'en