Revue d'histoire des mathématiques,
9 (2003), p. 9–31.

DEUX CADASTRES DE L'ÉPOQUE D'UR III

par Jacques QUILLIEN (*)

RÉSUMÉ. — On ne connaît, parmi la très nombreuse documentation cunéiforme, que deux documents présentant les caractéristiques des tablettes étudiées ici, écrites il y a plus de quarante siècles dans la Mésopotamie du Sud. Celles-ci présentent le dessin d'un champ de forme assez complexe, dont la partie centrale est découpée en rectangles pour en permettre le calcul de l'aire. Chaque rectangle porte deux indications d'aire.

Le cadastre dessiné sur la première tablette est de forme assez régulière. Son revers est lisible et on peut y lire les aires cumulées vérifiant celles de la face. La tablette a reçu en 1898 une interprétation obtenue par tâtonnements. L'autre tablette présente un dessin aux formes plus contournées et n'avait pas jusqu'à présent été expliquée. Son revers trop abîmé ne peut être confronté avec les indications de la face.

Le présent travail propose une reconstitution des calculs du scribe pour les deux tablettes, basée sur la prise en compte du travail du géomètre-arpenteur.

ABSTRACT. — TWO CADASTRAL SKETCHES FROM THE TIME OF UR III. — Among the numerous cuneiform documents available, only two tablets have the characteristics of those presented here; they were written more than forty centuries ago in South Mesopotamia. On one side, they bear the drawing of a field, whose shape is quite complex : the core is divided into rectangles to allow the calculation of the area. Each rectangle bears two inscriptions related to the area.

The cadastral sketch inscribed on the first of these tablets is made up of quite regular shapes; the indications on the reverse are legible and are accumulated values of areas that confirm the calculations on the obverse. In 1898, an interpretation of this document based on trial and error was proposed. The other tablet, made up of more intricate geometric shapes, has not been explained until now, the reverse being too damaged to be compared with the indications written on the obverse.

The present study takes into account the work done by the surveyor, and suggests a reconstitution of the scribe's calculations for the two tablets.

Les tablettes MIO 1107 et Wengler 36 que nous allons étudier sont en écriture cunéiforme et en langue sumérienne. Elles ont été trouvées au

(*) Texte reçu le 29 janvier 2002, révisé le 21 mars 2003.
J. QUILLIEN, 121, avenue Philippe Auguste, 75011 Paris.
Courrier électronique : j.quillien@wanadoo.fr.
Mots clés : Mathématiques babyloniennes, cadastre, arpentage, sumérien.
Classification AMS : 01-08, 01A07, 01A17, 51-03, 54-99.

cours de fouilles clandestines aux environs de Lagaš, dans la Mésopotamie du Sud (à 80 km environ d'Ur). Elles ont été écrites dans cette même zone géographique à la fin du III^{e} millénaire avant notre ère, à une époque où les rois de la troisième dynastie d'Ur, conventionnellement appelée Ur III, organisaient la production de leur empire de façon centralisée. La province de Lagaš était spécialisée dans la production de céréales.

Ces deux tablettes présentent sur leur face le dessin d'une surface complexe (figures 1 et 8), où le scribe a tracé dans l'argile des traits qui délimitent un habillage périphérique de trapèzes et de triangles et une zone centrale, le *temen*, qu'il a découpée en rectangles. L'ensemble du dessin porte des indications de nombres cunéiformes qui représentent des longueurs et des aires. Les calculs qui relient les longueurs et les aires n'y figurent pas. Les tablettes comportent sur le revers un texte en sumérien où l'on retrouve en particulier la somme des aires écrites sur la face (figure 1, copie de MIO 1107 ; nous n'avons pas de copie du revers de Wengler 36).

On a appelé cadastres ces représentations de surfaces étendues, couvrant respectivement 41 km^2 et 14 km^2.

La singularité de ces deux tablettes réside dans la présentation des aires du *temen* : chacun des éléments rectangulaires porte deux indications d'aires écrites tête-bêche et sensiblement différentes l'une de l'autre. Le but de cette note est de proposer une explication complète de ces indications et de présenter une reconstitution des calculs du scribe. Nous donnons également une signification géométrique simple à ces calculs, que nous avons établie pour la tablette MIO 1107, puis appliquée à la tablette Wengler 36.

Comme on le verra, tous les calculs d'aires de la périphérie sont faits en considérant que les côtés se coupent à angle droit. Mais quand sur le terrain on doit tracer un côté perpendiculaire à un autre, on le fait toujours avec une approximation (dont l'importance est fonction des dispositifs utilisés). Les arpenteurs mésopotamiens ont eux aussi connu cette *approximation dans le tracé*, qui ne peut être assimilée à une erreur, et *qui a des conséquences sur les longueurs.*

Par exemple, pour faire le simple tracé d'un rectangle à partir d'un côté AB existant, on élève deux perpendiculaires en A et B puis on porte sur ces droites les longueurs égales AC et BD. La longueur du côté CD dépend de l'approximation faite dans le tracé des perpendiculaires. Notre reconstitution prend en compte cette incertitude dans le tracé.

Les particularités des deux tablettes ont retenu l'intérêt de nombreux chercheurs. Ainsi la tablette MIO 1107 a été éditée par F. Thureau-Dangin [1898] qui a ensuite repris son étude pour quelques compléments et corrections mineurs [Thureau-Dangin 1928]. Il écrit : « le grand polygone central se divise en quatre rectangles (figure 1) pour lesquels deux séries d'évaluation sont données pour compenser les erreurs (sur les longueurs). Voici comment, après quelques tâtonnements, j'ai pu reconstituer ces calculs » [Thureau-Dangin 1898, p. 17]. Il exécute ensuite les opérations qui mettent en correspondance les longueurs et les aires inscrites sur la tablette, mais il ne fournit ni explication ni support géométrique à ses « tâtonnements ». C'est pourquoi son approche de MIO 1107 n'a pu être utilisée pour Wengler 36, dont la parution date pourtant de 1922. Et quand il évoque des « erreurs » pour justifier la nécessité des deux calculs, il ne rend pas compte de la signification de celles-ci. Nous faisons les mêmes opérations arithmétiques que lui, mais en donnant un sens et une explication géométrique aux calculs du scribe, ce qui nous permet ensuite d'utiliser le même principe pour reconstituer les calculs de Wengler 36.

J. Oppert [1898] a critiqué l'interprétation de F. Thureau-Dangin en refusant le système métrologique qu'il adoptait et qui venait d'être proposé [Reisner 1896], puis en niant l'idée même de marge d'erreur d'une mesure : « la mesure était quelque chose de sacré dans l'antiquité et se tromper était une profanation » [Oppert 1898, p. 32].

Wengler 36 a été édité par A. Deimel [1922] qui en a donné des schémas, une transcription et quantité de résultats concernant surtout la périphérie. Il ne semble pourtant pas qu'il ait analysé les mécanismes de calcul du *temen*.

S. Dunham [1986] s'est intéressée aux diverses significations du terme *temen* dans les textes mésopotamiens et, entre autres occurrences, à sa présence dans trois « tablettes de champs » de la période d'Ur III, parmi lesquelles figure MIO 1107 mais non Wengler 36. Elle reproduit les calculs faits par les savants qui ont publié ces tablettes, et en particulier ceux de

F. Thureau-Dangin, mais ne les étudie pas.

J. Friberg [1990], dans la synthèse très importante qu'il a publiée sur les mathématiques des textes cunéiformes, a considéré ces deux tablettes et écrit : « la surface centrale *ša*$_3$*-temen-na* est constituée de pseudo-rectangles. La '*false area formula*' est appliquée à chacun des pseudo-rectangles » [Friberg 1990, p. 542] . L'explication que nous proposons est différente (pour la *false area formula*, voir § 2.2.4).

M. Liverani [1990] a fourni la copie des deux cadastres MIO 1107 et Wengler 36, mais son propos est une réflexion sur le paysage et les formes des champs néo-sumériens et non l'analyse de mécanismes de calcul.

L'ouvrage collectif *Archaic bookkeeping* a présenté une belle copie et une photographie de la face de Wengler 36. Pour le calcul de la zone centrale, les auteurs indiquent que « les diverses parties sont calculées comme si leurs côtés opposés étaient égaux » [Nissen-Damerow-Englund 1993, p. 66–69]. Cette affirmation, incomplète, ne rend pas compte de tous les calculs.

P. Damerow reprend une formulation identique : « les différentes surfaces partielles du *temen* sont calculées comme si les côtés opposés étaient de même longueur » [Damerow 2001, p. 254].

Nous allons expliciter notre méthode sur des exemples simples, puis l'appliquer à la tablette MIO 1107 et nous verrons ensuite comment la mettre en œuvre sur Wengler 36. Mais auparavant il est nécessaire de présenter les notations et les systèmes d'unités utilisés sur les deux tablettes.

1. UNITÉS ET NOTATIONS

Les *longueurs* sont exprimées en « ninda » (1 ninda vaut environ 6 mètres), elles sont écrites le long des côtés, dans un système sexagésimal positionnel. Le scribe utilise deux signes, le chevron qui signifie la dizaine et le clou vertical qui signifie l'unité, à un facteur près de 60^n. L'ambiguïté sur l'ordre de grandeur, inhérente au système d'écriture, est levée par la considération des aires, et par deux autres signes qui marquent la place de l'unité : le signe pour $\frac{1}{2}$ et le signe pour 600.

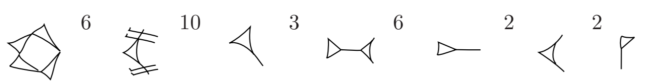
Pour notre propre transcription de l'écriture sexagésimale, nous choisissons, selon une convention usuelle dans l'écriture moderne des mathématiques mésopotamiennes, de marquer la position de l'unité par un point-virgule. Nous indiquons ci-après entre parenthèses les longueurs exprimées dans le système décimal.

Dans la figure 1,

- NZ est coté , sa valeur est 15 ninda, que nous écrivons 15 ; .
- AZ est coté , la prise en considération des aires nous permet de choisir 60×6 ninda, et nous écrivons 6 00 ; (360).
- OB, coté vaut $1 \times 600 + 1 \times 60 + 3 \times 10 + 2$, nous écrivons 11 32 ; (692).

Pour être tout à fait complet, il faut signaler l'occurrence pour la longueur AO du mot sumérien que nous lisons « la » et qui signifie « moins ». AO, qui s'écrit vaut $1 \times 600 + 9 \times 60 + 2 \times 10 - 1$, que nous écrivons 19 19 ; (1159). Nous donnons les dimensions selon les deux notations sexagésimale et décimale sur les dessins des *temen* (figures 6, 7 et 10).

Les aires sont décrites par un système additif où l'on inscrit directement le nombre d'unités en juxtaposant les signes qui ont chacun une valeur concrète fixe. Les unités relèvent d'un système métrologique fixé bien avant l'écriture de ces tablettes. On les représente de manière courante par le diagramme suivant



šar bur'u bur eše iku ubu DIŠ

où les nombres représentent le rapport entre les grandeurs mesurées par les unités successives. Ainsi 1 bur = 3 eše, 1 eše = 6 iku, etc. Pour signifier 5 bur + 2 eše + 3 iku, le scribe inscrit .

La correspondance entre longueurs et surfaces peut s'exprimer par une seule relation, soit 1 iku = $(10 \text{ ninda})^2$, ce qui donne 1 iku = environ 3.600 m^2, 1 eše = 21.600 m^2, 1 bur = 64.800 m^2, etc.

Pour l'écriture des aires, nous conservons le choix de F. Thureau-Dangin de transformer directement en bur les unités supérieures : pour 3 šar 5 bur'u 1 bur 2 eše 2 iku 1 ubu, nous écrivons donc 231 bur 2 eše 2 iku 1 ubu (figure 1, aire $AOPY$).

Les systèmes d'unités ont été détaillés par M. Powell [1990].

2. UN CADASTRE CHALDÉEN

C'est sous ce titre que F. Thureau-Dangin [1898] a traité de MIO 1107.