

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HYMAN BASS

Conjecture Jacobienne et opérateurs différentiels

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 38 (1989), p. 39-50

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1989_2_38__39_0

© Mémoires de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONJECTURE JACOBIEENNE ET OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS*

Hyman BASS**

à Pierre SAMUEL

1.— Introduction et énoncés

Soient

$$A = \mathbb{C}[x] \subset B = \mathbb{C}[t]$$

deux algèbres de polynômes en n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $t = (t_1, \dots, t_n)$. Nous supposons que

$$(1) \quad \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} = 1.$$

Alors la Conjecture Jacobienne affirme que $A = B$. La condition (1) entraîne que B est étale (= plat et non ramifié) sur A , donc que toute dérivation de A se prolonge à B . Par exemple $\partial_i = \partial/\partial x_i$ opère sur $b = b(t) \in B$ par

$$\partial_i(b) = \frac{\partial(x_1, \dots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\partial(t_1, \dots, \dots, t_n)}.$$

On peut donc considérer A et B comme des modules sur l'algèbre de Weyl

$$W = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n].$$

* Une exposition plus élaborée des résultats présentés ici se trouve dans [B].

** Travail subventionné en partie par NSF Grant DMS 85-03754.

Dans W est contenue l'algèbre de Lie $\underline{gl}_n(\mathbb{C})$, de base $\epsilon_{ij} = x_i \partial_j$ ($i, j = 1, \dots, n$). Soit $\underline{g} \subset \underline{gl}_n(\mathbb{C})$ une sous-algèbre de Lie.

1.1.— THEOREME. Si $\dim_{\mathbb{C}}(\underline{g}) > n$, alors B est un module de torsion sur l'algèbre enveloppante $U = U_{\underline{g}}$.

En effet supposons que $b \in B$ engendre un U -module libre, $Ub \simeq U$. D'après le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt, U est de croissance polynomiale de degré $\dim_{\mathbb{C}}(\underline{g})$. D'autre part $Ub \subset B$ et B est de croissance polynomiale de degré Krull $\dim(B) = n$, d'où $\dim_{\mathbb{C}}(\underline{g}) \leq n$ (cf. [B], Prop. (3.2)).

Ce résultat fournit la stratégie suivante pour approcher la Conjecture Jacobienne. Choisissons une algèbre de Lie $\underline{g} \subset \underline{gl}_n(\mathbb{C})$ de dimension $> n$ et d'algèbre enveloppante $U = U_{\underline{g}}$. Alors la condition :

(2) B/A est un U -module sans torsion

entraîne, d'après (1.1), que $A = B$. Plus explicitement, (2) signifie que :

(2') Si $\phi \in U$, $\phi \neq 0$, $f \in B$, et $\phi f \in A$, alors $f \in A$.

Un élément non constant ϕ du U est dit irréductible si dans toute factorisation $\phi = \phi_1 \cdot \phi_2$ dans U on a $\phi_1 \in \mathbb{C}$ ou $\phi_2 \in \mathbb{C}$. La filtration de Poincaré–Birkhoff–Witt montre que tout élément de U est produit d'éléments irréductibles. Si on vérifie (2') pour ϕ irréductible alors il est vrai en général (par récurrence sur le nombre de facteurs irréductibles de ϕ). Il suffit donc de considérer (2') pour ϕ irréductible.

Quitte à remplacer $x(t)$ par $x(t) - x(0)$, on peut supposer que $x(0) = 0$. Alors la condition (1) entraîne que les complétés $\hat{A}$ et $\hat{B}$ à l'origine coïncident. D'où les inclusions :

$$A = \mathbb{C}[x] \subset B \subset \hat{A} = \mathbb{C}[[x]].$$

Notons A_d le $\mathbb{C}$ -module des polynômes en $x = (x_1, \dots, x_n)$ homogènes de degré d . On a

$$(3) \quad A = \bigoplus_{d \geq 0} A_d \subset \hat{A} = \prod_{d \geq 0} A_d.$$

Les opérateurs $\epsilon_{ij} = x_i \partial_j$ sont homogènes, donc les A_d dans (3) sont des U -modules.

Soient $\phi \in U$ et $f \in B$ comme dans (2'). Ecrivons $f = \sum_{d \geq 0} f_d$ où $f_d \in A_d$. On a $\phi f = \sum_{d \geq 0} \phi f_d$ avec $\phi f_d \in A_d$. La condition $\phi f \in A$ signifie que $\phi f_d = 0$ pour tout $d > N$, pour N suffisamment grand. Si $f_{(N)} = \sum_{d \leq N} f_d$ on a $f_{(N)} \in A$ et $\phi(f - f_{(N)}) = 0$; d'ailleurs $f \in A \Leftrightarrow f - f_{(N)} = 0$; d'ailleurs $f \in A \Leftrightarrow f - f_{(N)} \in A$. Ainsi dans (2') on peut remplacer l'hypothèse " $\phi f \in A$ " par " $\phi f = 0$ ".

NOTATION. Pour tout opérateur linéaire D sur un module V notons

$$V_0^D = \text{Ker} (V \xrightarrow{D} V).$$

Avec cette notation, on voit maintenant que les conditions (2) et (2') sont équivalents à la condition :

$$(2'') \quad B_0^\phi \subset A \text{ pour tout élément irréductible } \phi \text{ de } U = U_g.$$

Pour le cas $n = 2$ nous avons obtenu les résultats suivants. Posons $x = x_1$, $y = x_2$, $\epsilon_x = x \frac{\partial}{\partial x}$, $\epsilon_y = y \frac{\partial}{\partial y}$, $\delta = x \frac{\partial}{\partial y}$, $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y$. On a

$$A = \mathbb{C}[x, y] \subset B \subset \hat{A} = \mathbb{C}[[x, y]].$$

1.2.— PROPOSITION. B/A est un module sans torsion sur $\mathbb{C}[\epsilon, \delta]$. Plus précisément :

- (a) $B_0^\delta = \mathbb{C}[x] \subset A$ et $\hat{A}_0^\delta = \mathbb{C}[[x]]$.
- (b) Si $\phi = \phi(\epsilon, \delta)$ et $\phi(\epsilon, 0) \neq 0$ alors $B_0^\phi = \hat{A}_0^\phi \subset A$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\hat{A}_0^\phi) < \infty$.

1.3.— THEOREME. Soit $\phi = a\epsilon_x - b\epsilon_y - c$ où $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a, b \geq 0$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$, $c \leq 0$ si $a = 0$, et $c \geq 0$ si $b = 0$. Posons $u = x^b y^a$. Alors

$$B_0^\phi = x^r y^s \mathbb{C}[u] \subset A \text{ et } \hat{A}_0^\phi = x^r y^s \mathbb{C}[[u]],$$

où (r, s) est le point de $\mathbb{N}^2$ le plus près de l'origine sur la droite $ax - by = c$.

Appelons spécial linéaire tout élément ϕ de la forme $\phi = a\epsilon_x - b\epsilon_y - c$ comme dans (1.3).

1.4.— THEOREME. B/A est un module sans torsion sur $\mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$. Plus précisément soit ϕ un élément irréductible de $\mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$. Il y a trois cas possibles :

- (a) $B_0^\phi = \hat{A}_0^\phi \subset A$ et $\dim_{\mathbb{C}}(\hat{A}_0^\phi) < \infty$.
- (b) Il existe un $k \neq 0$ dans $\mathbb{C}$ tel que $k\phi$ soit spécial linéaire (cf. (1.3))
- (c) $\dim_{\mathbb{C}}(\hat{A}_0^\phi) = \infty$ mais tout $f \in \hat{A}_0^\phi$ qui est algébrique sur $\mathbb{C}(x, y)$ appartient à A . En particulier $B_0^\phi \subset A$.

Pour démontrer la Conjecture Jacobienne (pour $n = 2$) il suffit, d'après (1.1), de montrer que B/A est un module sans torsion sur

$$U = \mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y, \delta] = U_{\underline{q}},$$

où $\underline{q}$ désigne l'algèbre triangulaire supérieure de $\underline{q}_2(\mathbb{C})$.

1.5.— THEOREME. Soit $\phi = \phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \delta) \in U$ et posons $\phi_0 = \phi(\epsilon_x, \epsilon_y, 0) \in \mathbb{C}[\epsilon_x, \epsilon_y]$. Supposons que ϕ_0 ne soit pas multiple d'un élément spécial linéaire. Alors tout $f \in \hat{A}_0^\phi$ qui est algébrique sur $\mathbb{C}(x, y)$ appartient à A . En particulier $B_0^\phi \subset A$.

Les démonstrations de (1.4) et (1.5) font intervenir le théorème de Siegel sur les courbes algébriques ayant un nombre infini de points entiers, ainsi que le théorème de Fabry sur les séries lacunaires.

2.— Deux lemmes préliminaires.

Soient $A \subset B$ des anneaux commutatifs intègres de corps de fractions $F \subset E$. Notons $A^\times$ et $B^\times$ leurs groupes des éléments inversibles

$$\begin{array}{ccc} F & \subset & E \\ U & \subset & U \\ A & \subset & B \end{array}$$

2.1.— LEMME. Supposons que A soit factoriel, que B soit plat sur A , et que $A^\times = B^\times$. Alors $F \cap B = A$ (autrement dit, B/A est un A -module sans torsion).