LAURE BLASCO

Paires duales réductives en caractéristique 2

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 52 (1993), p. 1-73
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_52__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 52
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 121, 1993, fascicule 1, pp. 1-73.

Paires duales réductives en caractéristique 2

Laure Blasco

Résumé. Sur un corps local de caractéristique 2, A.Weil a défini le groupe métaplectique comme extension d'un groupe dit pseudosymplectique. Cependant, les paires de sous-groupes réductifs (G, G') de ce groupe, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre, n'avaient pas été classifiées. Une classification complète est ici établie, ainsi que la trivialité de l'extension métaplectique restreinte à ces sous-groupes.

Abstract. Over a local field of characteristic 2, A.Weil has defined the metaplectic group as an extension of a group called "pseudosymplectique". However, the pairs of reductive subgroups (G, G') of this group, dual in the sense that G and G' are each others centralizers, had not been classified. A complete classification is established here, as well as the triviality of the metaplectic extension restricted to these subgroups.

AMS subjects classification ; 11F27, 22E50
11F70, 20G25, 20G40

Texte reçu le 1[er] juin 1992, révisé le 31 juillet 1992.

Institut de Recherche Mathématique Avancée. Université Louis Pasteur et CNRS.
7, Rue René Descartes. 67084 Strasbourg Cedex. France.

Introduction

Analysant les travaux de C.L. Siegel sur les formes quadratiques, A. Weil montre en 1964, le rôle capital que joue dans la théorie des fonctions thêta, une représentation unitaire (projective) du groupe dit pseudosymplectique [15].

Poursuivant dans cette voie, R. Howe propose une théorie générale [6] qui explique la dualité entre certains groupes classiques, dualité mise en évidence par de nombreux auteurs. R. Howe introduit la notion de paires duales réductives (c'est-à-dire de paires (G, G') de sous-groupes réductifs, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre) et définit une correspondance entre certaines représentations projectives irréductibles de ces sous-groupes à l'aide de la représentation de Weil.

Cette théorie, développée sur les corps de caractéristique nulle ou impaire, peut-elle être élargie à des corps de caractéristique 2 ?

Répondre à cette question nécessite de revenir à l'article d'A. Weil [15]. Il apparaît alors que le groupe pseudosymplectique n'est plus isomorphe au groupe symplectique mais est une extension d'un groupe orthogonal.

Plus précisément, considérons un corps F de caractéristique 2, fini ou local, et W un espace vectoriel sur F muni d'une forme quadratique Q non dégénérée et non défective, d'indice quelconque (I.1.1) (A. Weil s'intéresse au cas d'indice maximal). Notons $O(Q)$ le groupe des isométries de (W, Q). Le groupe pseudosymplectique est alors une extension de $O(Q)$ par le module $\mathcal{Q}_a(W)$ des formes quadratiques additives définies sur W. Cette extension est, en général, non triviale (I.1.3).

Nous remarquons que l'existence de formes quadratiques additives non nulles est propre à la caractéristique 2. Elle est source de nouveaux problèmes pour la recherche des paires duales et pour l'étude de l'extension métaplectique.

Cette étude fait l'objet du paragraphe I.2. Le groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$, défini précédemment, est formé d'automorphismes d'un groupe de Heisenberg (I.1.2) triviaux sur le centre. Par le théorème de Stone-Von Neumann, encore valable sous nos hypothèses, nous construisons l'extension métaplectique (I.2.1). Celle-ci présente deux particularités (que nous mettons en évidence sur sa restriction au sous-groupe $\mathcal{Q}_a(W)$ (I.2.2)) : être d'ordre exactement 2 que F soit fini ou local ; avoir des éléments qui ne commutent pas quand bien même leurs projections commuteraient dans le groupe pseudosymplectique.

Dans l'étape suivante nous classifions les paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.1 et 2). Elles sont de la forme : deux groupes linéaires ou un groupe symplectique et un groupe orthogonal ou deux groupes unitaires ou encore, une des deux paires duales triviales. Nous reconnaissons là les différentes "familles" obtenues pour les autres caractéristiques. Par ailleurs, quand cela doit être précisé, nous décrivons les sous-groupes du groupe pseudosymplectique qui interviennent (II.2.2).

Mais revenons à la démonstration établissant la classification. Dans un premier temps nous avons recherché les paires duales réductives de $O(Q)$ par des méthodes communes aux autres caractéristiques [8] (II.1). Nous abandonnons ensuite ces méthodes pour décrire à partir de la classification obtenue un procédé qui nous permet de construire des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.2.2). Nous en dressons la liste (II.2.1 proposition b). Est-elle complète ?

Le vérifier exige la connaissance de certaines propriétés des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II. 2.1 théorème c). De ces propriétés et du lemme 2.4, nous déduisons, pour chaque paire duale réductive non triviale (G, G') du groupe pseudosymplectique, l'existence d'une paire duale réductive (K, K') déjà répertoriée telle que les projections de K et K' sur $O(Q)$ contiennent celles de G et G' respectivement : de là, via le corollaire 2.1.d, l'exhaustivité de la liste établie (II.2.1 théorème e).

Le dernier paragraphe traite de la restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives. Cette restriction est toujours scindée (sauf au-dessus des paires duales triviales).

Il apparaît en outre que les images réciproques des composantes d'une paire duale non triviale commutent dans l'extension métaplectique. Ainsi donc, nous pouvons étendre la correspondance locale de Howe au cas de caractéristique 2 et retrouver des situations connues.

Nous pouvons également étudier les propriétés de cette correspondance. En particulier, elle s'avère être "compatible" avec l'induction parabolique. Pour le démontrer, il suffit de suivre, mutatis mutandis, le raisonnement de S. Kudla [7] et ses variantes [8, Ch.3 §§IV et V]. Ce dernier point n'est pas développé dans le présent article.

L'ensemble de ces résultats est issu d'une nouvelle thèse préparée à l'université de Paris-Sud (Orsay) sous la direction de Guy Henniart. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.