

LE THÉORÈME FORT DES GRAPHS PARFAITS

par Gérard CORNUÉJOLS

INTRODUCTION

Au début des années 1960, Claude Berge [1] a proposé deux conjectures sur les graphes parfaits. La première a été démontrée en 1972 par Laci Lovász [22]. La deuxième a fait couler beaucoup d'encre dans les 30 années qui ont suivi. Elle a été démontrée en 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas dans un article très impressionnant de 179 pages paru récemment dans les *Annals of Mathematics* [5]. Cet exposé présente cette conjecture célèbre et donne une idée de sa démonstration.

1. GRAPHS PARFAITS

Un *graphe* G consiste en un ensemble fini $V(G)$ de *sommets* et un ensemble $A(G)$ de paires non ordonnées uv où $u, v \in V(G)$ et $u \neq v$, appelées *arêtes*. (Pour le lecteur habitué à une définition plus générale de la notion de graphe, nous considérons ici des graphes finis sans boucles ni arêtes multiples.) Si uv est une arête, on dit que les sommets u et v sont *adjacents*, qu'ils sont les *extrémités* de l'arête uv et que l'arête uv est *incidente* à u et à v .

Dans un graphe G , un *stable* est un ensemble de sommets non adjacents deux à deux. Une *clique* est un ensemble de sommets adjacents deux à deux. On note $\omega(G)$ la cardinalité d'une plus grande clique dans G , et $\alpha(G)$ la cardinalité d'un plus grand stable. Une *k -coloration* de G est une partition des sommets de G en k stables (on appelle ces stables les *classes de couleur* de la k -coloration). Autrement dit, un graphe a une k -coloration s'il est possible de colorier ses sommets avec k couleurs distinctes de façon que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ est la plus petite valeur de k pour laquelle il existe une k -coloration. Il est clair que $\omega(G) \leq \chi(G)$ puisque chaque sommet d'une clique doit être dans une classe de couleur différente. Un graphe H est un *sous-graphe induit* de

G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $A(H)$ est l'ensemble des arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour $S \subseteq V(G)$, on note $G(S)$ le sous-graphe induit de G dont S est l'ensemble des sommets. On note $G \setminus S$ le graphe $G(V(G) - S)$.

DÉFINITION 1.1. — *Un graphe G est parfait si $\omega(H) = \chi(H)$ pour tout sous-graphe induit H de G .*

2. LES CONJECTURES DE CLAUDE BERGE

Un graphe est *minimalement imparfait* s'il n'est pas parfait, mais tous ses sous-graphes induits propres le sont. Évidemment, un graphe est parfait si et seulement s'il ne contient pas de graphe minimalement imparfait comme sous-graphe induit. Quels sont les graphes minimalement imparfaits connus ? Un *trou* est un graphe avec $k \geq 4$ sommets distincts $v_1, \dots, v_k$ et k arêtes $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_kv_1$. Un trou est *impair* si k est impair. Les trous impairs ne sont pas parfaits puisque leur nombre chromatique est égal à 3 et la plus grande clique a cardinalité 2. Il est facile de vérifier que les trous impairs sont minimalement imparfaits. Le *complément* d'un graphe G est le graphe $\overline{G}$ qui a le même ensemble de sommets et où uv est une arête de $\overline{G}$ si et seulement si uv n'est pas une arête de G . Il n'est pas très difficile de vérifier que les compléments des trous impairs sont aussi minimalement imparfaits.

Au début des années 1960, Claude Berge [1] a formulé la *Conjecture Forte des Graphes Parfaits* : les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et leurs compléments. Cette conjecture a suscité un très grand intérêt pendant quarante ans, jusqu'à sa résolution en mai 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas dans un article très impressionnant de 179 pages [5]. Claude Berge s'est éteint en juin 2002 sachant que sa conjecture célèbre est correcte.

THÉORÈME 2.1 (**Théorème Fort des Graphes Parfaits** (*Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas* [5]))

Les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et leurs compléments.

Nous allons présenter les idées principales de la démonstration de ce théorème. Il sera commode d'appeler *graphe de Berge* un graphe qui ne contient ni trou impair ni son complément comme sous-graphe induit. Tout graphe parfait est bien évidemment un graphe de Berge. Le Théorème Fort des Graphes Parfaits affirme que la réciproque est vraie : tout graphe de Berge est parfait.

Pour augmenter l'intérêt pour cette conjecture difficile, Claude Berge [1] avait formulé une deuxième conjecture, très jolie mais plus faible, disant qu'un graphe G est parfait si et seulement si son complément $\overline{G}$ est parfait. Ray Fulkerson [18] s'est cassé les dents sur cette conjecture (mais a développé pour l'attaquer la belle théorie des

polyèdres antibloquants) et c'est Laci Lovász [22] qui l'a démontrée en 1972. Nous en donnons une démonstration courte et élégante proposée par Grigor Gasparyan [19] en 1996.

THÉORÈME 2.2 (Théorème des Graphes Parfaits (Lovász [22]))

Un graphe G est parfait si et seulement si son complément $\overline{G}$ est parfait.

Démonstration. — Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Lovász [21], et qui est plus fort.

Assertion : Un graphe G est parfait si et seulement si, pour tout sous-graphe induit H , le nombre des sommets de H est au plus égal à $\alpha(H)\omega(H)$.

Cette assertion implique le théorème 2.2 puisque $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$ et $\omega(H) = \alpha(\overline{H})$.

Démonstration de l'assertion. — Si le graphe G est parfait, on a $\omega(H) = \chi(H)$ pour tout sous-graphe induit H et l'inégalité de l'assertion découle directement du fait que le nombre des sommets de H est au plus égal à $\alpha(H)\chi(H)$.

Il suffit donc de démontrer la réciproque. Nous présentons la démonstration de Gasparyan [19]. Supposons que le graphe G ne soit pas parfait. Soit H un sous-graphe induit minimalement imparfait. Nous noterons n le nombre des sommets de H , $\alpha := \alpha(H)$ et $\omega := \omega(H)$. Le graphe H satisfait aux relations suivantes :

$$\omega = \chi(H \setminus v) \text{ pour tout } v \in V(H), \text{ et}$$

$$\omega = \omega(H \setminus S) \text{ pour tout stable } S \subseteq V(H).$$

Soit A_0 un α -stable de H (le terme α -stable est un raccourci pour dire un stable de cardinalité α). On fixe une ω -coloration dans chacun des α graphes $H \setminus s$ où $s \in A_0$. Soient $A_1, \dots, A_{\alpha\omega}$ les stables qui apparaissent comme classe de couleur dans l'un de ces coloriages. Soit $\mathcal{A} := \{A_0, A_1, \dots, A_{\alpha\omega}\}$. On définit la matrice d'incidence $\mathbf{A}$ entre ces stables et les sommets de H . Donc $a_{ij} = 1$ dans la matrice $\mathbf{A}$ si et seulement si $v_j \in A_i$. Soit $\mathcal{B} := \{B_0, B_1, \dots, B_{\alpha\omega}\}$ où B_i est une ω -clique de $H \setminus A_i$. Soit $\mathbf{B}$ la matrice d'incidence correspondante cliques-sommets.

Nous allons démontrer que $\mathbf{AB}^T = J - I$, où J est la matrice remplie de uns et I est la matrice identité.

Considérons une ω -coloration $S_1, \dots, S_\omega$ de $H \setminus s$. Une ω -clique B_i intersecte tous les S_j si $s \notin B_i$ (puisque $|B_i \cap S_j| \leq 1$ pour tout j et $|B_i| = \omega$), et tous les S_j sauf un si $s \in B_i$. Comme chaque B_i a au plus un sommet dans A_0 , il en découle que $\mathbf{AB}^T = J - I$.

On fait maintenant appel à un argument d'algèbre linéaire. Puisque la matrice $J - I$ a rang plein, on en déduit que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont chacune au moins autant de colonnes que de lignes, c'est-à-dire $n \geq \alpha\omega + 1$. $\square$

Ayant démontré la Conjecture Faible des Graphes Parfaits (Théorème 2.2), nous allons maintenant nous attaquer à la Conjecture Forte (Théorème 2.1). Rappelez-vous qu'il suffit de démontrer que tout graphe de Berge est parfait. L'idée de la démonstration est que tout graphe de Berge ou bien fait partie d'une classe de graphes parfaits parmi quatre classes élémentaires connues, ou bien a un type de séparation qui ne peut pas se produire dans un graphe minimalement imparfait. Un tel résultat structurel démontre la Conjecture Forte puisqu'il implique qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. Une petite remarque : on peut se contenter de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets : cela implique aussi qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. C'est un tel résultat structurel qu'ont démontré Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas [5].

3. QUATRE CLASSES ÉLÉMENTAIRES DE GRAPHS PARFAITS

Un graphe G est *biparti* si ses sommets peuvent se partitionner en deux ensembles V_1, V_2 de façon que toutes les arêtes de G aient une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 . Les graphes bipartis sont parfaits puisque la bipartition induit deux classes de couleur et par conséquent $\omega(H) = \chi(H)$ dans tout sous-graphe induit H .

Un graphe L est le *graphe lignes* du graphe G si $V(L) = A(G)$ et deux sommets de L sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes de G ont un sommet en commun.

PROPOSITION 3.1. — *Le graphe lignes d'un graphe biparti est parfait.*

Démonstration. — L'indice chromatique $\chi'(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier ses arêtes avec k couleurs distinctes de façon que deux arêtes ayant un sommet en commun ne soient pas de la même couleur. König [20] a démontré que l'indice chromatique d'un graphe biparti est égal au degré maximum $\Delta(G)$ (le *degré* d'un sommet u est le nombre d'arêtes incidentes à u).

Si L est le graphe lignes d'un graphe biparti G , on a $\chi(L) = \chi'(G)$ et $\omega(L) = \Delta(G)$. Le théorème de König implique donc que $\chi(L) = \omega(L)$. La proposition découle maintenant du fait que les sous-graphes induits de L sont aussi des graphes lignes de graphes bipartis. $\square$

Puisque les graphes bipartis et les graphes lignes de graphes bipartis sont parfaits, il découle du Théorème des Graphes Parfaits de Lovász (Théorème 2.2) que les compléments des graphes bipartis et des graphes lignes de graphes bipartis sont parfaits.

On peut aussi le vérifier directement, sans faire appel au Théorème des Graphes Parfaits. Pour résumer, nous avons introduit dans cette section quatre classes de graphes parfaits :

- les graphes bipartis et leurs compléments, et
- les graphes lignes de graphes bipartis et leurs compléments.

Nous appellerons ces classes de graphes les *classes élémentaires de graphes parfaits*.

4. 2-JOINT, PAIRE HOMOGENÈME ET PARTITION ANTISYMMÉTRIQUE

Dans cette section, nous introduisons trois types de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets.

4.1. 2-joint

Un graphe G a un *2-joint* si ses sommets peuvent se partitionner en deux ensembles V_1, V_2 , chacun de cardinalité au moins trois, contenant des sous-ensembles non vides disjoints $A_1, B_1 \subseteq V_1$ et $A_2, B_2 \subseteq V_2$, tels que tous les sommets de A_1 soient adjacents à tous les sommets de A_2 , tous les sommets de B_1 soient adjacents à tous les sommets de B_2 et ces adjacences soient les seules entre V_1 et V_2 . Les 2-joints ont été introduits en 1985 par Cornuéjols et Cunningham [16].

Lorsqu'un graphe G a un 2-joint, on peut décomposer G en deux blocs G_1 et G_2 .

Pour définir ces blocs, nous avons besoin d'introduire les notions de chemin et de composante connexe. Un *chemin* dans un graphe G est une suite de sommets distincts $u_1, \dots, u_k$ tels que $u_i u_{i+1} \in A(G)$ pour $i = 1, \dots, k-1$. La *longueur* du chemin est égale à $k-1$. Les sommets u_1 et u_k sont les *extrémités* du chemin et les autres sommets sont *intérieurs*. Un chemin est *induit* s'il n'existe pas d'arête $u_i u_j$ pour $i \geq 1$ et $i+1 < j \leq k$. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe induit par un ensemble maximal de sommets tels qu'il existe un chemin entre chaque paire d'entre eux.

Nous pouvons maintenant définir les blocs G_1 et G_2 . Si A_2 et B_2 sont dans des composantes connexes différentes de $G(V_2)$, définir le *bloc* G_1 comme étant $G(V_1 \cup \{p_1, q_1\})$, où $p_1 \in A_2$ et $q_1 \in B_2$. Sinon, soit P_1 un plus court chemin avec une extrémité dans A_2 et l'autre dans B_2 , et définir le *bloc* G_1 comme étant $G(V_1 \cup P_1)$. Le bloc G_2 est défini de façon similaire.

THÉORÈME 4.1 (Théorème de Décomposition par 2-Joint (Cornuéjols et Cunningham [16]))

Soit G un graphe qui a un 2-joint. Le graphe G est parfait si et seulement si ses blocs G_1 et G_2 sont parfaits.