332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1001) *Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe*

Cédric VILLANI

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61^{e} année, 2008-2009, n^{o} 1001, p. 101 à 134

PARADOXE DE SCHEFFER-SHNIRELMAN REVU SOUS L'ANGLE DE L'INTÉGRATION CONVEXE [d'après C. De Lellis et L. Székelyhidi]

par **Cédric VILLANI**

« Vous, les normaux*, dès qu'on vous met devant la moindre des choses sortant de l'ordinaire, vous vous mettez à poser des questions... »*
F. Brown, Paradoxe Perdu

Le paradoxe de Banach–Tarski est parfois qualifié d'« énoncé le plus surprenant de toutes les mathématiques ». Dans le domaine de la mécanique des fluides, si un théorème peut prétendre à ce titre, c'est à coup sûr le paradoxe de Scheffer–Shnirelman, selon lequel un fluide (non visqueux, incompressible) peut brusquement décider de s'agiter frénétiquement, sans qu'aucune force extérieure ne lui ait été appliquée. En fait cet énoncé est peut-être encore plus troublant que celui de Banach–Tarski, car il ne repose même pas sur l'axiome du choix...

Depuis sa découverte dans les années 1990, le paradoxe de Scheffer–Shnirelman a suscité l'étonnement, l'effroi ou le mépris, mais il s'agissait en tout cas d'un résultat singulier, pour ainsi dire isolé du courant de la recherche en équations aux dérivées partielles. La situation vient de changer radicalement avec les remarquables travaux de Camillo De Lellis et László Székelyhidi, qui réinterprètent et précisent les résultats de Scheffer et Shnirelman, tout en les replaçant au cœur de la recherche moderne en théorie des inclusions différentielles. Par la même occasion, ils révèlent un lien inattendu entre l'énoncé de Scheffer–Shnirelman et d'autres paradoxes célèbres, en particulier le théorème de plongement isométrique de Nash–Kuiper.

Cet exposé est consacré aux travaux de De Lellis et Székelyhidi, tels qu'on les trouve dans les articles [**15, 17**] ; les preuves des résultats principaux étant simples et élégantes, il me sera possible de les présenter dans leur intégralité. L'exposé se conclura par des prolongements, certains faisant l'objet de recherches en cours, d'autres extrêmement spéculatifs.

C'est un plaisir de remercier Camillo De Lellis et László Székelyhidi pour les innombrables échanges que nous avons eus au cours de la rédaction de ce texte. J'étends ces remerciements à Bernard Dacorogna et François Murat pour leurs explications

généreusement prodiguées ; et à Claude Bardos, Yann Brenier, Alessio Figalli, Uriel Frisch, Étienne Ghys, Emmanuel Giroux, Misha Gromov, Yann Ollivier et Jean-Claude Sikorav pour leurs commentaires sur ce manuscrit.

1. DEUX ÉNONCÉS PARADOXAUX

1.1. Paradoxe de Nash–Kuiper

Pour $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ et $r > 0$ on note $B^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| < r\}$ et $S^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = r\}$, où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne. On munit $B^n(r)$ et $S^{n-1}(r)$ de la structure de variété riemannienne induite par $\mathbb{R}^n$ euclidien.

Théorème 1.1 (Nash 1954, Kuiper 1955). — *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0, 1[$ il existe un plongement isométrique C^1 de $S^n(1)$ dans $B^{n+1}(r)$.*

En d'autres termes, il existe $\varphi \in C^1(S^n(1); B^{n+1}(r))$ réalisant une isométrie entre les variétés riemanniennes $S^n(1)$ et $\varphi(S^n(1))$, toutes deux munies de leur distance géodésique intrinsèque. En langage informel, le théorème 1.1 permet de « compacter » une sphère de rayon 1 à l'intérieur d'une boule minuscule, *sans faire de plis*. Si cet énoncé est choquant, c'est parce qu'il va à l'encontre du principe familier[(1)] selon lequel, pour $n \geq 2$, $S^n(1)$ admet un unique plongement isométrique dans $\mathbb{R}^{n+1}$, modulo bien sûr une isométrie de $\mathbb{R}^{n+1}$: c'est le théorème de rigidité de Cohn–Vossen, qui ici ne s'applique pas car il requiert plus de régularité ! (La régularité C^2 est suffisante au vu des travaux de Pogorelov [**42**].)

Même sans invoquer ce théorème de rigidité, on voit bien que le plongement de Nash–Kuiper semble contredire le « theorema egregium » de Gauss, selon lequel la courbure est invariante par isométrie. Soit en effet $r' < r$ minimal tel que $\varphi(S^n(1)) \subset \overline{B^n(r')}$, et soit x un point où $\varphi(S^n(1))$ est tangent (intérieurement) à $S^n(r')$. Un argument élémentaire de comparaison montre que les courbures sectionnelles de $\varphi(S^n(1))$ en x, définies en un sens généralisé et calculées extrinsèquement, sont minorées par $1/(r')^2 > 1$ — alors que les courbures de $S^n(1)$ sont toutes égales à 1 !

En fait, toute la saveur du théorème 1.1 réside dans l'hypothèse de régularité : en régularité lipschitzienne le résultat serait à peu près évident, alors qu'en régularité C^2 il serait faux. On peut d'ailleurs affiner : en régularité $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ le théorème

(1) Pour être plus rigoureux, ce qui fait partie de notre expérience « tangible », c'est que l'on ne peut déformer isométriquement une sphère (ou plus généralement une surface de courbure gaussienne strictement positive), à moins de « forcer » (penser à une balle de ping-pong cabossée...). Il s'avère que le plongement de Nash–Kuiper peut s'obtenir par déformation isométrique C^1 de l'identité [**28**].

reste vrai pour α assez petit, et devient faux pour α assez grand, sans que l'on sache précisément quel est l'exposant optimal [**3, 4, 10**].

Le théorème 1.1 est démontré comme cas particulier d'un énoncé beaucoup plus général : *étant données* (M, g) *une variété riemannienne compacte de dimension* n*, et* (V, h) *une variété riemannienne de dimension* $n + 1$*, s'il existe un plongement (resp. une immersion)* $\varphi \in C^1(M; V)$ *telle que* $\varphi^*h < g$ (i.e. φ réduit strictement les distances) *alors pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un plongement (resp. une immersion) isométrique*(2) $\widetilde{\varphi} \in C^1(M; V)$ *telle que* $\|\widetilde{\varphi} - \varphi\|_{C^0} \leq \varepsilon$*.* Ce théorème est présenté par exemple dans les ouvrages de Gromov [**28**, section 2.4.9], Eliashberg et Mishachev [**23**, Chapitre 21], Székelyhidi [**49**]. Nash [**39**] prouvait ce résultat pour une variété V de dimension $n + 2$, et Kuiper [**32**] parvenait peu après à affiner sa méthode pour aboutir à l'énoncé ci-dessus, optimal en un certain sens. Dans ces articles ainsi que dans [**33**] on pourra trouver d'autres résultats, s'appliquant par exemple à des variétés non compactes.

La stratégie de Nash, révolutionnaire à l'époque, consistait à partir de la « sous-solution stricte » φ, et à accroître progressivement les distances, « direction par direction », en introduisant des spirales ; Kuiper remplaçait ensuite les spirales par des « zigzags » convenablement régularisés.

Figure 1. Brique élémentaire des constructions de Nash et Kuiper. La spirale et le zigzag sont bien plus longs que le segment, tout en étant très proches de lui pour la topologie uniforme.

Quelques décennies plus tard, le procédé de Nash fut revu en profondeur et généralisé par Gromov [**28**], fondant ainsi la théorie de l'*intégration convexe*, qui a de nombreuses applications en géométrie [**23**, Partie IV] [**47**].

Entre les mains de spécialistes des équations aux dérivées partielles, la technique d'intégration convexe s'est transformée en une formidable machine à produire des contre-exemples, culminant avec la construction par Müller et Šverák [**37**] de systèmes elliptiques 2×2 « fortement quasiconvexes » admettant des solutions lipschitziennes, nulle part C^1. Un autre résultat marquant est la construction par Kirchheim et Preiss

(2) Rappelons la différence entre plongement C^1 et immersion : dans les deux cas la différentielle est supposée injective en tout point, mais le plongement est en outre supposé globalement injectif ; en clair, une immersion autorise l'auto-intersection. Une immersion φ est dite isométrique si pour tout x la différentielle $d_x\varphi$ préserve la norme des vecteurs tangents. Cela ne veut pas dire pour autant que φ induit une isométrie au sens des espaces métriques — sauf bien sûr si φ est un plongement !

d'une application lipschitzienne non affine $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont le gradient ne prend que cinq valeurs différentes $A_1, \ldots, A_5$, telle que u varie de manière « purement multidimensionnelle », au sens où rang $(A_i - A_j) > 1$ pour tous indices i, j distincts.(3) Sur ces sujets et d'autres applications de l'intégration convexe en théorie des équations aux dérivées partielles on pourra consulter l'article de revue [**31**].

1.2. Paradoxe de Scheffer–Shnirelman

Dans sa version la plus simple (du moins la plus simple à énoncer), l'équation d'Euler incompressible modélise le mouvement d'un fluide non visqueux, de densité constante emplissant tout l'espace $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), observé sur un intervalle de temps $I \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = f \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où l'inconnue est le couple formé du champ de vitesses $v : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ et de la pression $p : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$; et $f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ est un champ de forces, que l'on supposera très régulier (C^∞ à support compact). Dans (1) j'ai utilisé des notations traditionnelles : en notant $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $1 \leq i \leq n$, on définit $(\nabla p)^i = \partial_i p$, $(v \otimes v)^{ij} = v^i v^j$, $(\nabla \cdot M)^j = \sum_i \partial_i M^{ij}$ (divergence composante par composante de la matrice M), et $\nabla \cdot v = \sum_i \partial_i v^i$. L'hypothèse de divergence nulle, $\nabla \cdot v = 0$, exprime l'incompressibilité du fluide et permet de réécrire $\nabla \cdot (v \otimes v) = (v \cdot \nabla) v$, où $(v \cdot \nabla v)^i = \sum_j v^j \partial_j v^i$, ce qui est la dérivée convective de la vitesse du fluide.

Le modèle d'Euler, qui vient tout juste de fêter son deux cent cinquantième anniversaire, est l'une des pierres angulaires de la mécanique des fluides. Pour en savoir plus sur ce sujet on pourra consulter [**1**], [**2**], [**27**], [**34**], [**36**], et les nombreuses références qui s'y trouvent.

La régularité des solutions de l'équation (1), pour des conditions initiales régulières, est un formidable problème ouvert en dimension $n \geq 3$. Il existe divers résultats de régularité « conditionnels », par exemple un théorème de Constantin, Fefferman et Majda [**9**], qui s'applique pour des champs de vitesses bornés dont le rotationnel varie de manière lipschitzienne.

De toute façon, il est a priori légitime de vouloir appliquer l'équation d'Euler à des données physiquement réalistes, non lisses. On est donc naturellement amené à la définition suivante, où l'on note $\mathscr{D}'$ l'espace des distributions :

---

(3) Si ∇u vaut respectivement A_i et A_j de part et d'autre d'un ensemble rectifiable, il est facile de vérifier que rang $(A_i - A_j) = 1$ et que u se comporte comme $x \to |x_1|$: la variation de gradient se produit « selon une direction ». Au contraire, dans l'exemple de Kirchheim et Preiss, les variations font intervenir toutes les directions à la fois.