Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

A STABILITY CRITERION FOR HIGH-FREQUENCY OSCILLATIONS

Numéro 142
Nouvelle série

Yong LU
Benjamin TEXIER

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Jean BARGE
Emmanuel BREUILLARD
Gérard BESSON
Antoine CHAMBERT-LOIR
Jean-François DAT
Jean-Marc DELORT
Charles FAVRE
Daniel HUYBRECHTS
Yves LE JAN
Laure SAINT-RAYMOND
Wilhem SCHLAG

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2015

Vente au numéro : 30 € ($ 45)
Abonnement Europe : 136 €, hors Europe : 153 € ($ 231)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2015*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-285629-812-1

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MÉMOIRES DE LA SMF 142

A STABILITY CRITERION FOR HIGH-FREQUENCY OSCILLATIONS

Yong Lu
Benjamin Texier

Société Mathématique de France 2015
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Yong Lu
Mathematical Institute, Charles University, Prague.
E-mail : `luyong@karlin.mff.cuni.cz`

Benjamin Texier
Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche UMR CNRS 7586, Université Paris-Diderot.
E-mail : `benjamin.texier@imj-prg.fr`

2000 *Mathematics Subject Classification*. — 35L03, 35B35, 35Q60.

***Key words and phrases*. —** high-frequency oscillations, hyperbolic systems, resonances, Duhamel representation, pseudo-differential operators, Klein-Gordon systems, Raman amplification, Brillouin amplification.

Research of both authors was partially supported by the Project "Instabilities in Hydrodynamics" funded by the Mairie de Paris (under the "Emergences" program) and the Fondation Sciences Mathématiques de Paris. B.T. thanks Kevin Zumbrun for interesting discussions. Both authors thank Jeffrey Rauch for his comments on an earlier version of the manuscript.
June 2, 2015

A STABILITY CRITERION FOR HIGH-FREQUENCY OSCILLATIONS

Yong Lu, Benjamin Texier

Abstract. — We show that a simple Levi compatibility condition determines stability of WKB solutions to semilinear hyperbolic initial-value problems issued from highly-oscillating initial data with large amplitudes. The compatibility condition involves the hyperbolic operator, the fundamental phase associated with the initial oscillation, and the semilinear source term; it states roughly that hyperbolicity is preserved around resonances.

If the compatibility condition is satisfied, the solutions are defined over time intervals independent of the wavelength, and the associated WKB solutions are stable under a large class of initial perturbations. If the compatibility condition is not satisfied, resonances are exponentially amplified, and arbitrarily small initial perturbations can destabilize the WKB solutions in small time.

In the unstable case, the key observation is that resonances correspond to weakly hyperbolic frequencies; the amplification proof then relies on a short-time Duhamel representation formula for solutions of zeroth-order pseudo-differential equations.

Our examples include coupled Klein-Gordon systems, and systems describing Raman and Brillouin instabilities.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 142, SMF 2015

Résumé **(Un critère de stabilité pour des oscillations haute fréquence)**

Nous prouvons qu'une condition de compatibilité de type Levi détermine la stabilité de solutions WKB de systèmes hyperboliques issues de données rapidement oscillantes. La condition de compatibilité fait intervenir l'opérateur hyperbolique, la phase fondamentale associée aux oscillations initiales, et le terme source semi-linéaire ; la condition de compatibilité est satisfaite quand l'hyperbolicité est préservée au voisinage des résonances.

Si la condition de compatibilité est satisfaite, les solutions sont définies sur des intervalles de temps indépendants de la longueur d'onde, et les solutions WKB associées sont stables sous l'effet d'une grande classe de perturbations initiales. Si la condition de compatibilité n'est pas satisfaite, les résonances sont exponentiellement amplifiées et des perturbations initiales arbitrairement petites peuvent déstabiliser les solutions WKB en temps très court.

Dans le cas instable, nous observons que les résonances correspondent à des fréquences faiblement hyperboliques ; l'analyse de l'amplification se base sur une formule de représentation de Duhamel en temps court pour les solutions d'équations pseudodifférentielles d'ordre zéro.

Nous illustrons nos résultats par des systèmes de Klein-Gordon couplés, et des sytèmes décrivant les amplifications Raman et Brillouin.

CONTENTS

1. Introduction 1
1.1. Background 2
1.2. Resonances, transparency, and WKB solutions 3
1.3. A criterion for stability 6
1.4. On the class of initial perturbations 10
1.5. Overview of the results 11
1.6. On related instability results 12
1.7. Examples 13
1.8. Open problems 14

2. Assumptions and results 17
2.1. Main result 19
2.2. Comments 21
2.3. Extensions 23
2.3.1. Several non-transparent resonances 23
2.3.2. All non-transparent resonances are amplified 24
2.3.3. Improved spatial localization 26
2.3.4. A greater deviation estimate 26

3. Main proof 29
3.1. Proof of Theorem 2.7: instability 29
3.1.1. Overview of the instability proof 29
3.1.2. Preparation 29
3.1.3. Duhamel representation 39
3.1.4. Lower bound 40
3.1.5. Existence over logarithmic times and upper bound 44
3.1.6. Endgame: proof of the deviation estimate (2.16) 49
3.2. Proof of Theorem 2.7: stability 51
3.2.1. Symmetrizer 52
3.2.2. Uniform bounds 56

4. Other proofs 57
4.1. Proof of Theorem 2.9 57
4.1.1. Coordinatization 57
4.1.2. Normal form reduction 59
4.1.3. Space-frequency localization 64
4.1.4. Conclusion 65
4.2. Proof of Theorem 2.11 66
4.2.1. Preparation 66
4.2.2. Upper bounds 68
4.2.3. Conclusion 69
4.3. Proof of Theorem 2.12 70
4.4. Proof of Theorem 2.13 71

5. Examples 73
5.1. Raman and Brillouin instabilities 73
5.1.1. Three-wave interaction systems 74
5.1.2. Derivation of three-wave interaction systems from Euler-Maxwell 76
5.1.3. Raman 85
5.1.4. Brillouin 86
5.2. Coupled Klein-Gordon systems with equal masses 87
5.2.1. Verification of Assumption 2.1: smooth spectral decomposition 90
5.2.2. Verification of Assumption 2.2: WKB expansion 90
5.2.3. Verification of Assumption 2.8: resonances and transparency 91
5.2.4. Stability index 93
5.3. Coupled Klein-Gordon systems with different masses 94
5.3.1. Verification of Assumption 2.2: WKB expansion 94
5.3.2. Verification of Assumption 2.8: resonances and transparency 96
5.3.3. Stability index 97

6. Appendix 99
6.1. Symbols and operators 99
6.1.1. Estimates for Fourier multipliers 99
6.1.2. Estimates for pseudo-differential operators 100
6.1.3. Product laws in weighted Sobolev spaces 103
6.2. An integral representation formula 103
6.3. Bounds for the symbolic flow 108
6.3.1. The autonomous case 108
6.3.2. The general case 111
6.4. A Gronwall Lemma 112
6.5. On regularity of the spectral decomposition 113
6.6. On existence of WKB approximate solutions 114
6.7. On structure of the resonant set 121
6.7.1. Euler-Maxwell 122
6.7.2. Maxwell-Landau-Lifschitz 122
6.8. Notation index 123

6.9. Parameter list 124

Bibliography 127