Mémoires
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FUNCTIONAL CALCULUS FOR FIRST ORDER SYSTEMS OF DIRAC TYPE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Numéro 144
Nouvelle série

2016

Pascal AUSCHER
Sebastian STAHLHUT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 40 € ($ 60)
Abonnement Europe : 138 € hors Europe : 154 € ($ 231)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-829-9

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

MÉMOIRES DE LA SMF 144

FUNCTIONAL CALCULUS FOR FIRST ORDER SYSTEMS OF DIRAC TYPE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Pascal Auscher
Sebastian Stahlhut

Société Mathématique de France 2016
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

P. Auscher

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France.

E-mail : pascal.auscher@math.u-psud.fr

Sebastian Stahlhut

Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France.

E-mail : sebastian.stahlhut@math.u-psud.fr

2000 *Mathematics Subject Classification*. — 35J25, 35J57, 35J46, 35J47, 42B25, 42B30, 42B35, 47D06.

***Key words and phrases*. —** First order elliptic systems; Hardy spaces associated to operators; tent spaces; non-tangential maximal functions; second order elliptic systems; boundary layer operators; *a priori* estimates; Dirichlet and Neumann problems; extrapolation.

FUNCTIONAL CALCULUS FOR FIRST ORDER SYSTEMS OF DIRAC TYPE AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Pascal Auscher, Sebastian Stahlhut

Abstract. — This memoir contains two articles.

1) In *A priori estimates for boundary value elliptic problems via first order systems*, we prove a number of *a priori* estimates for weak solutions of elliptic equations or systems with vertically independent coefficients in the upper-half space. These estimates are designed towards applications to boundary value problems of Dirichlet and Neumann type in various topologies. We work in classes of solutions which include the energy solutions. For those solutions, we use a description using the first order systems satisfied by their conormal gradients and the theory of Hardy spaces associated with such systems but the method also allows us to design solutions which are not necessarily energy solutions. We obtain precise comparisons between square functions, non-tangential maximal functions and norms of boundary trace. The main thesis is that the range of exponents for such results is related to when those Hardy spaces (which could be abstract spaces) are identified to concrete spaces of tempered distributions. We consider some adapted non-tangential sharp functions and prove comparisons with square functions. We obtain boundedness results for layer potentials, boundary behavior, in particular strong limits, which is new, and jump relations. One application is an extrapolation for solvability "à la Šneĭberg". Another one is stability of solvability in perturbing the coefficients in L^∞ without further assumptions. We stress that our results do not require De Giorgi-Nash assumptions, and we improve the available ones when we do so.

2) In *L^p-L^q theory for holomorphic functions of perturbed first order Dirac operators*, the aim is to prove L^p-L^q off-diagonal estimates and L^p-L^q boundedness for operators in the functional calculus of certain perturbed first order differential operators of Dirac type for with $p \leq q$ in a certain range of exponents. We describe the L^p-L^q off-diagonal estimates and the L^p-L^q boundedness in terms of the decay properties of the related holomorphic functions and give a necessary condition for L^p-L^q boundedness. Applications to Hardy-Littlewood-Sobolev estimates for fractional operators will be given.

Résumé **(Calcul fonctionnel des systèmes du premier ordre de type Dirac et problèmes aux limites)**

Ce mémoire comporte deux articles.

1) Dans *Estimations a priori pour les problèmes aux limites elliptiques via des systèmes du premier ordre*, on démontre un certain nombre d'estimations *a priori* pour les solutions faibles d'équations ou systèmes elliptiques sur le demi-espace dont les coefficients sont indépendents de la variable verticale. Ces estimations s'appliquent aux problèmes de Dirichlet ou de von Neumann dans des topologies variées. Nous considérons des classes de solutions comprenant les solutions d'énergie. Pour ces solutions, on utilise une approche par réduction à un système du premier ordre vérifié par le gradient conormal et une théorie des espaces de Hardy associés à ces systèmes. La méthode permet aussi de construire d'autres types de solutions. On obtient des comparaisons précises entre les normes de certaines fonctions d'aire, de certaines fonctions non-tangentielles maximales et de la trace des solutions du système. La thèse du mémoire est que l'ensemble des exposants pour lesquels on obtient ces comparaisons est relié à celui pour lesquels les espaces de Hardy associés (qui pourraient n'être que des espaces abstraits) sont identifiés à des espaces concrets dans les distributions tempérées. On compare aussi les normes des fonctions maximales dièses non-tangentielles à celle des fonctions d'aire. On obtient en particulier des résultats de continuité pour les opérateurs de simple et double couche généralisés, leur comportement au bord dans des topologies fortes, ce qui est nouveau, et les relations de saut. Une des applications est un résultat d'extrapolation locale « à la Šneĭberg » pour la résolubilité de nos équations elliptiques. Une autre est la stabilité de la résolubilité par perturbations dans L^∞ des coefficients. On observe que nos résultats n'utilisent pas la régularité locale des solutions (i.e., les conditions de DeGiorgi-Nash) et, lorsque nous la supposons, nous améliorons les résultats existants.

2) Dans *Théorie L^p-L^q pour le calcul holomorphe d'opérateurs de Dirac perturbés*, notre objectif est de démontrer des estimations de continuité hors diagonale L^p-L^q pour des opérateurs dans le calcul fonctionnel de certains opérateurs différentiels de type Dirac avec $p \leq q$ dans un certain intervalle d'exposants. Nous donnons des conditions suffisantes et des conditions nécessaires pour obtenir de telles estimations. Une application à des inégalités de type Hardy-Littlewood-Sobolev pour les puissances fractionnaires est donnée.

CONTENTS

PART ONE

PART TWO