

Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

GROUND STATE ENERGY OF THE MAGNETIC LAPLACIAN ON CORNER DOMAINS

Numéro 145

Nouvelle série

Virginie BONNAILLIE-NOËL

Monique DAUGE

Nicolas POPOFF

2 0 1 6

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Comité de rédaction

Valérie BERTHÉ
Gérard BESSON
Emmanuel BREUILLARD
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Charles FAVRE

Raphaël KRIKORIAN
O' Grady KIERAN
Julien MARCHÉ
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 35 € (\$ 52)

Abonnement Europe : 138 € hors Europe : 154 € (\$ 231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-830-5

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

GROUND STATE ENERGY
OF THE MAGNETIC LAPLACIAN
ON CORNER DOMAINS

Virginie Bonnaille-Noël

Monique Dauge

Nicolas Popoff

Virginie Bonnaillie-Noël

Virginie Bonnaillie-Noël, Département de Mathématiques et Applications (DMA UMR 8553), PSL Research University, CNRS, ÉNS Paris, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05, France.

E-mail : virginie.bonnaillie@ens.fr

Monique Dauge

Monique Dauge, IRMAR UMR 6625 - CNRS, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

E-mail : monique.dauge@univ-rennes1.fr

Nicolas Popoff

Nicolas Popoff, IMB UMR 5251 - CNRS, Université de Bordeaux, 351 cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France.

E-mail : nicolas.popoff@u-bordeaux.fr

2000 Mathematics Subject Classification. — 81Q10, 35J10, 35P15, 47F05, 58G20.

This work was partially supported by the ANR (Agence Nationale de la Recherche), project NOSEVOL ANR-11-BS01-0019. The third author was also supported by the ARCHIMEDE Labex (ANR-11-LABX-0033) and the A*MIDEX project (ANR-11-IDEX-0001-02) funded by the “Investissements d’Avenir” French government program managed by the ANR.

GROUND STATE ENERGY
OF THE MAGNETIC LAPLACIAN
ON CORNER DOMAINS

Virginie Bonnaille-Noël, Monique Dauge, Nicolas Popoff

Abstract. — The asymptotic behavior of the first eigenvalue of a magnetic Laplacian in the strong field limit and with the von Neumann realization in a smooth domain is characterized for dimensions 2 and 3 by model problems inside the domain or on its boundary. In dimension 2, for polygonal domains, a new set of model problems on sectors has to be taken into account. In this work, we consider the class of general corner domains. In dimension 3, they include as particular cases polyhedra and axisymmetric cones. We attach model problems not only to each point of the closure of the domain, but also to a hierarchy of “tangent substructures” associated with singular chains. We investigate spectral properties of these model problems, namely semicontinuity and existence of bounded generalized eigenfunctions. We prove estimates for the remainders of our asymptotic formula. Lower bounds are obtained with the help of an IMS type partition based on adequate two-scale coverings of the corner domain, whereas upper bounds are established by a novel construction of quasimodes, qualified as sitting or sliding according to spectral properties of local model problems. A part of our analysis extends to any dimension.

Résumé (Niveau fondamental du laplacien magnétique dans des domaines à coins)

Le comportement asymptotique de la première valeur propre du Laplacien magnétique en présence d'un champ de forte intensité et avec les conditions de von Neumann sur un domaine régulier, est caractérisé en dimension 2 et 3 par des problèmes modèles à l'intérieur du domaine et sur son bord. En dimension 2, quand il s'agit d'un domaine polygonal, on doit inclure dans l'analyse un nouvel ensemble de problèmes modèles sur des secteurs plans. Dans ce travail, nous considérons la classe générale des domaines à coins. En dimension 3, ceux-ci comprennent en particulier les polyèdres et les cônes de révolution. Nous associons des problèmes modèles non seulement à chaque point de l'adhérence du domaine, mais également à une hiérarchie de structures tangentes associées à des chaînes singulières. Nous explorons des propriétés spectrales de ces problèmes modèles, en particulier la semi-continuité du niveau fondamental et l'existence de vecteurs propres généralisés. Nous démontrons des estimations de reste pour nos formules asymptotiques. Les bornes inférieures sont obtenues à l'aide de partitions de type IMS basées sur des recouvrements à deux échelles des domaines à coins. Les bornes supérieures sont établies grâce à une construction originale de quasimodes, qualifiés de fixes ou glissants selon les propriétés spectrales des problèmes modèles locaux. Une partie de notre analyse s'étend à la dimension quelconque.

CONTENTS

Part I. Introduction	1
1. Introduction of the problem and main results	3
1.1. The magnetic Laplacian and its lowest eigenvalue	4
1.2. Local ground state energies	6
1.3. Asymptotic formulas with remainders	8
1.4. Contents	11
1.5. Notations	13
2. State of the art	15
2.1. Without boundary or with Dirichlet conditions	15
2.2. Neumann conditions in dimension 2	16
2.3. Neumann conditions in dimension 3	18
Part II. Corner structure and lower bounds	21
3. Domains with corners and their singular chains	23
3.1. Tangent cones and corner domains	23
3.2. Admissible atlases	27
3.3. Estimates for local Jacobian matrices	30
3.4. Strata and singular chains	34
3.5. 3D domains	41
4. Magnetic Laplacians and their tangent operators	45
4.1. Change of variables	45
4.2. Model and tangent operators	46
4.3. Linearization	47
4.4. A general rough upper bound	49
5. Lower bounds for ground state energy in corner domains	53
5.1. Estimates outside conical points	54

5.2. Estimates near conical points	56
5.3. Generalization	59
Part III. Upper bounds	61
6. Taxonomy of model problems	63
6.1. Full space ($d = 0$)	64
6.2. Half-space ($d = 1$)	64
6.3. Wedges ($d = 2$)	66
6.4. 3D cones ($d = 3$)	67
7. Dichotomy and substructures for model problems	69
7.1. Admissible Generalized Eigenvectors	69
7.2. Dichotomy Theorem	70
7.3. Examples	73
7.4. Scaling and truncating Admissible Generalized Eigenvectors	74
8. Properties of the local ground state energy	77
8.1. Lower semicontinuity	77
8.2. Positivity of the ground state energy	78
9. Upper bounds for ground state energy in corner domains	81
9.1. Principles of construction for quasimodes	82
9.2. First level of construction and sitting quasimodes	84
9.3. Second level of construction and sliding quasimodes	87
9.4. Third level of construction and doubly sliding quasimodes	90
9.5. Conclusion	91
Part IV. Improved upper bounds	93
10. Stability of Admissible Generalized Eigenvectors	95
10.1. Structure of AGE's	95
10.2. Stability under perturbation	96
11. Improvement of upper bounds for more regular magnetic fields ..	99
11.1. (G1) One direction of exponential decay	100
11.2. (G2) Two directions of exponential decay	107
12. Conclusion: Improvements and extensions	113
12.1. Corner concentration and standard consequences	113
12.2. The necessity of a taxonomy	114
12.3. Continuity of local energies	114
12.4. Dirichlet boundary conditions	115
12.5. Robin boundary conditions with a large parameter for the Laplacian ..	116

Part V. Appendices	117
A. Magnetic identities	119
A.1. Gauge transform	119
A.2. Change of variables	120
A.3. Comparison formula	121
A.4. Cut-off effect	121
B. Partition of unity suitable for IMS type formulas	123
Bibliography	129
Index	137

