

# Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Numéro 149  
Nouvelle série

2 0 1 6

Raphaël BEUZART-PLESSIS

---

### **Comité de rédaction**

Valérie BERTHÉ	Raphaël KRIKORIAN
Gérard BESSON	O' Grady KIERAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Emmanuel RUSS
Jean-François DAT	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

### **Diffusion**

Maison de la SMF	AMS
B.P. 67	P.O. Box 6248
13274 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	www.ams.org

### **Tarifs 2016**

*Vente au numéro* : 45 € (\$67)

*Abonnement* Europe : 138 €, hors Europe : 154 € (\$231)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### **Secrétariat : Nathalie Christiaën**

Mémoires de la SMF  
Société Mathématique de France  
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris Cedex 05, France  
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96  
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2016

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 0249-633-X

ISBN 978-2-85629-841-1

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

---

**LA CONJECTURE LOCALE DE  
GROSS-PRASAD POUR LES  
REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES  
DES GROUPES UNITAIRES**

**Raphaël Beuzart-Plessis**

*R. Beuzart-Plessis*

Université d'Aix-Marseille, I2M-CNRS, Campus de Luminy,  
13288 Marseille CEDEX 9, France.

*E-mail* : rbeuzart@gmail.com

---

***Classification mathématique par sujets (2010).*** — 22E50, 11F85, 20G05.

***Mots clefs.*** — Conjecture locale de Gross-Prasad, groupes  $p$ -adiques, représentations tempérées.

---

# LA CONJECTURE LOCALE DE GROSS-PRASAD POUR LES REPRÉSENTATIONS TEMPÉRÉES DES GROUPES UNITAIRES

Raphaël Beuzart-Plessis

**Résumé.** — Soient  $E/F$  une extension quadratique de corps  $p$ -adiques et  $G = U(V)$ ,  $H = U(W)$  les groupes unitaires de deux espaces hermitiens  $V$  et  $W$  sur  $E$ . Supposons que  $V$  contienne  $W$  et que le complémentaire orthogonal de  $W$  dans  $V$  soit quasi-déployé (ce qui signifie que son groupe unitaire est quasi-déployé sur  $F$ ). Pour  $\pi$  et  $\sigma$  des représentations lisses irréductibles de  $G(F)$  et  $H(F)$ , les auteurs Gan, Gross et Prasad ont défini une multiplicité  $m(\pi, \sigma)$ . Dans le cas particulier où  $W$  est de codimension 1 dans  $V$ , cette multiplicité est simplement la dimension de l'espace d'entrelacements  $\mathbf{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$ . On énonce et prouve une formule intégrale pour cette multiplicité lorsque  $\pi$  et  $\sigma$  sont tempérées. On déduit alors de cette formule une version faible de la conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes unitaires. Cet article est la continuation directe d'un travail récent de Waldspurger concernant les groupes spéciaux orthogonaux.

**Abstract.** — Let  $E/F$  be a quadratic extension of  $p$ -adic fields and let  $G = U(V)$ ,  $H = U(W)$  be unitary groups of two hermitian spaces  $V$  and  $W$  over  $E$ . Assume that  $V$  contains  $W$  and that the orthogonal complement of  $W$  in  $V$  is an odd-dimensional quasisplit hermitian space (i.e. whose unitary group is quasisplit over  $F$ ). For  $\pi$  and  $\sigma$  smooth irreducible representations of respectively  $G(F)$  and  $H(F)$ , Gan, Gross and Prasad have defined a multiplicity  $m(\pi, \sigma)$ . In the particular case where  $W$  is of codimension 1 in  $V$ , this multiplicity is just the dimension of the intertwining space  $\text{Hom}_{H(F)}(\pi, \sigma)$ . When  $\pi$  and  $\sigma$  are tempered, we state and prove an integral formula for this multiplicity. We then deduce from this formula a weak version of the local Gross-Prasad conjecture for tempered representations of unitary groups. This article represents a straight continuation of recent work of Waldspurger dealing with special orthogonal groups.

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> .....	1
<b>1. Groupes, mesures, notations</b> .....	9
1.1. Groupes .....	9
1.2. Mesures .....	12
1.3. Bons voisinages .....	14
1.4. Intégrales orbitales invariantes et pondérées, quasi-caractères ...	14
1.5. Représentations, induites paraboliques, opérateurs d'entrelacements, caractères pondérés .....	16
1.6. R-groupes .....	18
1.7. Formule de Plancherel-Harish-Chandra .....	19
1.8. Fonctions cuspidales et très cuspidales, quasi-caractères associés	21
<b>2. Majorations unipotentes</b> .....	23
2.1. Une première majoration .....	23
2.2. Intégrales à paramètres .....	24
2.3. Fonctionnelles de Jacquet .....	25
2.4. Majorations de mesures .....	30
<b>3. Les groupes unitaires</b> .....	33
3.1. Généralités .....	33
3.2. Sous-groupes compacts spéciaux, paraboliques, Levi et R-groupes	35
3.3. Orbites nilpotentes régulières .....	36
<b>4. Position du problème</b> .....	39
<b>5. Le développement géométrique : définitions et énoncé</b> .....	43
5.1. Un ensemble de tores .....	43
5.2. Un critère de convergence .....	44
5.3. Définition de $J_{\text{geom}}(\theta, f)$ .....	48
5.4. Énoncé du développement géométrique .....	52
5.5. Énoncé du théorème pour les algèbres de Lie .....	52

<b>6. Descente à l'algèbre de Lie</b> .....	55
6.1. Localisation de $J_N(\theta, f)$ .....	55
6.2. Localisation de $J_{\text{geom}}(\theta, f)$ .....	59
<b>7. Utilisation de la transformée de Fourier</b> .....	63
7.1. Étude des classes de conjugaison dans $\Xi + S + \Sigma$ .....	64
7.2. Un calcul de jacobien .....	70
7.3. Choix de sections localement analytiques .....	73
7.4. Calcul de $J_{\kappa''}(\theta'', \varphi)$ .....	77
<b>8. Calcul de la limite de <math>J_{x,\omega,N}(\theta, f)</math></b> .....	79
8.1. Première transformation de $J_{x,\omega,N}(\theta, f)$ .....	79
8.2. Changement de la fonction de troncature .....	82
8.3. Le résultat final .....	89
<b>9. Cas des supports nilpotents</b> .....	91
9.1. Calcul de la limite de $J_N(\theta, f)$ .....	91
9.2. Une première approximation .....	93
9.3. Calcul de germes de Shalika .....	95
9.4. Preuve de la proposition 9.0.1 .....	95
<b>10. Preuve des théorèmes 5.4.1 et 5.5.1</b> .....	99
10.1. Preuve du théorème 5.5.1 .....	100
10.2. Preuve du théorème 5.4.1 .....	101
<b>11. Décomposition de Cartan relative</b> .....	103
<b>12. Majorations d'intégrales, cas <math>R = 0</math></b> .....	113
<b>13. Majorations d'intégrales, cas général</b> .....	119
<b>14. Entrelacements tempérés</b> .....	133
14.1. Un lemme sur les entrelacements .....	134
14.2. Entrelacements dans une famille d'induites .....	135
14.3. Tout entrelacement est tempéré .....	144
<b>15. Induction et multiplicités</b> .....	149
15.1. Induction de $\pi$ et multiplicité I .....	150
15.2. Induction de $\sigma$ et multiplicité .....	154
15.3. Induction de $\pi$ et multiplicité II .....	155
<b>16. Le développement spectral</b> .....	157
16.1. La formule .....	157
16.2. Utilisation de la formule de Plancherel .....	158
16.3. Changement de fonction de troncature .....	161



16.4. Utilisation des calculs spectraux d'Arthur .....	163
16.5. Évaluation d'une limite .....	164
16.6. Preuve du théorème .....	165
<b>17. Une formule pour la multiplicité .....</b>	<b>167</b>
17.1. Le théorème .....	167
17.2. Induction pour la multiplicité géométrique .....	168
17.3. Pseudo-coefficients .....	173
17.4. Le cas du groupe linéaire .....	174
17.5. Le théorème 17.1.2 implique le théorème 17.1.1 .....	174
17.6. Preuve du théorème 17.1.2 .....	175
<b>18. Une application à la conjecture de Gross-Prasad .....</b>	<b>179</b>
18.1. Propriétés des $L$ -paquets tempérés pour les groupes unitaires ..	179
18.2. Un calcul de fonction $\widehat{j}$ .....	181
18.3. Classes de conjugaison stable de tores .....	181
18.4. Un résultat dans le sens de la conjecture de Gross-Prasad .....	185
<b>Bibliographie .....</b>	<b>189</b>

