Torsten Schoeneberg

SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND THEIR CLASSIFICATION OVER $\mathfrak{p}$-ADIC FIELDS

MÉMOIRES DE LA SMF 151

Société Mathématique de France 2017

Comité de rédaction

Christine BACHOC
Emmanuel BREUILLARD
Yann BUGEAUD
Jean-François DAT
Marc HERZLICH
O' Grady KIERAN
Raphaël KRIKORIAN
Julien MARCHÉ
Laurent MANIVEL
Emmanuel RUSS
Christophe SABOT
Wilhelm SCHLAG

Pascal HUBERT (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 35 € ($ 52)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 162 €, *hors Europe :* 186 € ($ 279)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
memsmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

© *Société Mathématique de France 2017*

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 0249-633-X (print) 2275-3230 (electronic)
ISBN 978-2-85629-859-6

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

MÉMOIRES DE LA SMF 151

SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND THEIR CLASSIFICATION OVER $\mathfrak{p}$-ADIC FIELDS

Torsten Schoeneberg

Société Mathématique de France 2017
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

T. Schoeneberg
Torsten Schoeneberg, Camosun College, 3100 Foul Bay Rd, Victoria BC V8P 5J2.
E-mail : torsten.schoeneberg@gmail.com

2010 ***Mathematics Subject Classification*****. —** 17B05, 17B20, 17B22.

Key words and phrases**. —** Semisimple Lie algebras, Classification, p-adic fields, Tits index.

SEMISIMPLE LIE ALGEBRAS AND THEIR CLASSIFICATION OVER $\mathfrak{p}$-ADIC FIELDS

Torsten Schoeneberg

***Abstract.* —** We study semisimple Lie algebras over fields of characteristic zero, with emphasis on $\mathfrak{p}$-adic fields and aiming at classification. We first transfer parts of the structure theory of reductive algebraic groups to our setting, with some variations. Classifying invariants are attached to Lie algebras and visualised with Satake-Tits diagrams. We give necessary and sufficient criteria for these diagrams. Over general fields of characteristic zero, we then classify all quasi-split forms, and we adapt an older classification theory for the classical types A-D to our language. Finally we focus on $\mathfrak{p}$-adic fields, where we achieve a complete classification by combination of certain well-known properties of these fields with our general results and methods, and we discuss the relation of this with a theorem of Kneser. This extends work by Weisfeiler.

***Résumé* (Algèbres de Lie semi-simples et leur classification sur les corps p-adiques)**

Nous étudions les algèbres de Lie semi-simples sur les corps de caractéristique nulle, où l'accent est mis sur les corps p-adiques, l'objectif étant leur classification. Nous transférons d'abord certaines parties de la théorie de la structure des groupes réductifs dans notre contexte, avec quelques variations. Des invariants classifiants sont attachés aux algèbres de Lie et sont visualisés à l'aide de diagrammes de Satake-Tits. Nous donnons des critères nécessaires et suffisants pour ces diagrammes. Sur les corps généraux de caractéristique nulle, nous classifions ensuite toutes les formes quasi-déployées et nous traduisons une théorie ancienne de classification pour les types classiques A-D dans notre langue. Nous mettons enfin l'accent sur les corps p-adiques, où nous obtenons une classification complète par combinaison de certaines propriétés bien connues sur ces corps avec nos résultats généraux et nos méthodes, et nous abordons la relation de ces résultats avec un théorème de Kneser. Tout cela prolonge un travail de Weisfeiler.

© Mémoires de la Société Mathématique de France 151, SMF 2017

CONTENTS

1. Introduction 3

2. Prerequisites 9
2.1. Lie algebras and root systems 9
2.2. $\mathfrak{p}$-adic fields, C1 fields, quaternion algebras 15
2.3. Quadratic, symplectic and hermitian forms 16

3. Structure theory and the isomorphism theorem 19
3.1. Definition of the invariants 19
3.2. Special cases and examples 47
3.3. The isomorphism theorem 54
3.4. Visualisation: Satake-Tits diagrams 61

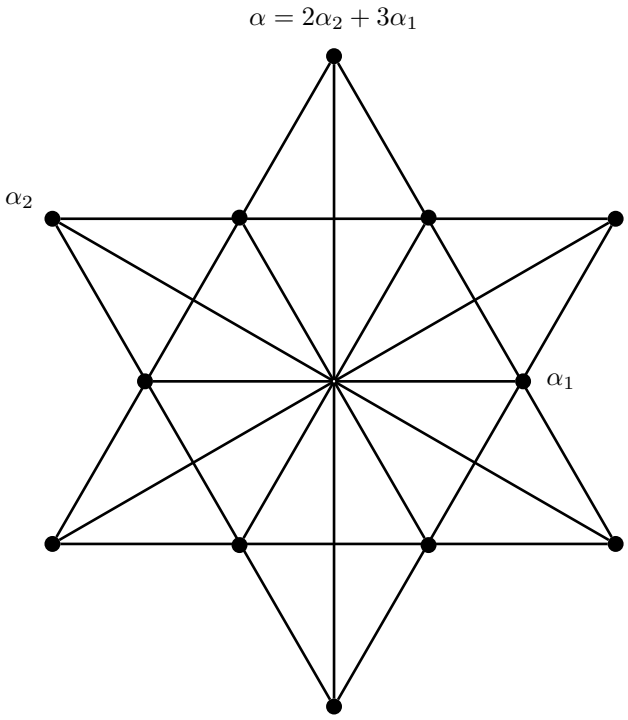
4. Classification over general fields 65
4.1. Reduction to absolutely simple Lie algebras 65
4.2. Galois cohomology and forms of certain types 68
4.3. Necessary and sufficient conditions on the index 72
4.4. Skew fields and anisotropic types 77
4.5. Involutorial algebras and the classical types 79
4.6. Quasi-split forms 95

5. Classification over special fields 99
5.1. C1 fields and unramified splitting for $\mathfrak{p}$-adic fields 99
5.2. Type AI and Kneser's theorem 101
5.3. Tools for ruling out anisotropic forms: The prime degree case 103
5.4. Types AII, B, C and D over $\mathfrak{p}$-adic fields 112
5.5. Exceptional Lie algebras over $\mathfrak{p}$-adic fields 116

6. Concluding remarks 141
6.1. The field $k = \mathbb{R}$ 141
6.2. k-rational approaches (Allison, Seligman) 141
6.3. Explicit constructions for exceptional types 142

Bibliography 143

To the memory of Michel Lazard and Boris Weisfeiler

[. . .] Und es starben
Noch andere viel. Mit eigener Hand
Viel traurige, wilden Muths, doch göttlich
Gezwungen, zulezt, die anderen aber
Im Geschike stehend, im Feld. [. . .]

Hölderlin, *Mnemosyne*