Yiwen DING

FORMES MODULAIRES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

MÉMOIRES DE LA SMF 155

Société Mathématique de France 2017

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.munusami@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2017

Vente au numéro : 45 € ($ 67)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 162 €, *hors Europe :* 186 € ($ 279)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
nathalie.christiaen@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0249-633X (print) 2275-3230 (electronic)

ISBN 978-2-85629-877-0

Stéphane SEURET
Directeur de la publication

MÉMOIRES DE LA SMF 155

FORMES MODULAIRES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

Yiwen DING

Société Mathématique de France 2017
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Yiwen DING
Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing, 100871.
E-mail : yiwen.ding@bicmr.pku.edu.cn

***Classification mathématique par sujets* (2010). —** 14F41, 11F85, 22E50.

***Mots clefs.* —** Cohomologie complétée, compatibilité local-global, courbe de Shimura unitaire, forme modulaire p-adique, programme de Langlands p-adique, représentation localement analytique, variété de Hecke.

***DOI.* —** 10.24033/msmf.463

Cet ouvrage est ma thèse sous la direction de Christophe Breuil. J'aimerais tout d'abord le remercier de m'avoir fait confiance et m'avoir amené à un domaine mathématique très intéressant et enrichissant. Je le remercie pour des discussions, des remarques et des conseils très utiles. Cela a changé ma façon de faire des mathématiques. Je lui suis aussi très reconnaissant d'avoir pris le temps pour lire et relire cette thèse, et pour corriger de nombreuse erreurs en mathématiques et en français.

Je remercie sincèrement Joël Bellaïche et Payman Kassaei d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je les remercie pour le temps qu'ils ont accordé à la lecture de cette thèse et à l'élaboration de leur rapport. Je remercie également Laurent Berger, Gaëtan Chenevier, Vincent Pilloni et Jacques Tilouine qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Je remercie le China Scholarship Council pour avoir financé cette thèse. Durant sa préparation, le département de mathématiques de l'Université Paris-Sud m'a fourni de merveilleuses conditions de travail. Merci à Valérie Blandin-Lavigne et à Marie-Christine Myoupo, qui m'ont beaucoup aidé durant toutes ces années.

Je remercie Yi Ouyang qui a eu une grande influence sur mon orientation mathématique. Il m'a fait découvrir les représentations galoisiennes p-adiques et m'a conseillé de poursuivre mes études en France.

Je remercie Riccardo Brasca, Marco De Ieso, Payman Kassaei, Santosh Nadimpalli, Vincent Pilloni, Jyoti Praskash Saha, Xu Shen, Haoran Wang, surtout Yichao Tian et Liang Xiao pour des discussions et leurs réponses à mes questions au cours de ce travail.

Mes remerciements vont aussi à mes parents qui ont toujours cru en moi et m'ont soutenu dans mes choix. J'aimerais remercier Shu, mon épouse, pour m'avoir accompagné et soutenu, et pour tout le bonheur qu'elle m'a apporté durant toutes ces années.

Enfin, je remercie les rapporteurs pour de nombreux commentaires et suggestions utiles.

FORMES MODULAIRES p-ADIQUES SUR LES COURBES DE SHIMURA UNITAIRES ET COMPATIBILITÉ LOCAL-GLOBAL

Yiwen DING

Résumé. — On étudie les formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires et montre l'existence des formes compagnons surconvergentes en utilisant les théorèmes de comparaison p-adique. Ceci, combiné avec des résultats sur les représentations localement analytiques de $\mathrm{GL}_2(L)$, nous permet d'obtenir des résultats de compatibilité local-global sur le socle localement analytique dans le H^1-complété des courbes de Shimura unitaires. En outre, en utilisant une loi d'adjonction en famille du foncteur de Jacquet-Emerton et la théorie de triangulation globale, on montre également des résultats de compatibilité local-global sur des représentations localement analytiques non semi-simples.

***Abstract* (*p*-adic modular forms over unitary Shimura curves and local-global compatibility)**

We study p-adic modular forms over unitary Shimura curves and prove the existence of overconvergent companions forms over unitary Shimura curves using p-adic comparison theorems. From which, together with some locally analytic representation theory of $\mathrm{GL}_2(L)$, we deduce some local-global compatibility results on the socle for the completed H^1 of unitary Shimura curves. In addition, using an adjunction formula for Jacquet-Emerton functor in family and global triangulation theory, we also prove some local-global compatibility results for non semi-simple locally analytic representations.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Soient L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ assez grande pour contenir tous les plongements de L dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, le programme de Langlands p-adique pour le groupe $\mathrm{GL}_2(L)$ consiste à chercher une correspondance entre certaines représentations p-adiques ρ_L de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ de dimension 2 sur E et certaines représentations p-adiques de $\mathrm{GL}_2(L)$ sur E. Dans le cas $L = \mathbb{Q}_p$, une telle correspondance est bien construite (*cf.* [**14**], [**27**], [**36**]). Le programme de Langlands local p-adique pour $\mathrm{GL}_2(L)$ avec $L \neq \mathbb{Q}_p$ est encore mystérieux et s'est déjà révélé nettement plus compliqué (*e.g.* voir [**14**, §3]).

Cependant, lorsque la représentation ρ_L de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/L)$ provient d'une représentation galoisienne *globale* ρ qui apparaît par exemple dans la cohomologie étale de certaines courbes de Shimura, en utilisant la cohomologie étale complétée à la Emerton, on peut associer à ρ une représentation de Banach admissible $\widehat{\Pi}(\rho)$ de $\mathrm{GL}_2(L)$ (*e.g.* voir (1.2.2) ci-dessous), qui est supposée être la « bonne » représentation correspondant à ρ_L. Un aspect essentiel dans le programme de Langlands p-adique est alors de comprendre cette représentation, *e.g.* peut-on décrire $\widehat{\Pi}(\rho)$ en terme de ρ_L ?

Dans cette thèse, on étudie les vecteurs localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\widehat{\Pi}(\rho)$ et on montre divers résultats sur cette représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique (en direction d'un analogue de la conjecture 8.1 de [**15**] dans le cas de courbes de Shimura unitaires). Un ingrédient crucial est l'étude des formes modulaires p-adiques sur les courbes de Shimura unitaires.

1.1. Courbes de Shimura unitaires

Soient F un corps de nombres totalement réel de degré fini $d_F > 1$, $\mathscr{E}$ une extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$ telle que la place p soit décomposée dans $\mathscr{E}$, u une place de $\mathscr{E}$ au-dessus de p, et $\mathscr{F} := \mathscr{E} \cdot F$. Supposons pour simplifier dans cette introduction qu'il n'existe qu'une place $\wp$ de F au-dessus de p, et notons :

▹ $F_\wp$ le complété de F en $\wp$ avec $\mathscr{O}_\wp$ son anneau des entiers,

▹ ϖ une uniformisante de $\mathscr{O}_\wp$,

▹ $(u,\wp)$ la place de $\mathscr{F}$ au-dessus de $\wp$ et u,

▹ $\mathscr{F}_{(u,\wp)}$ le complété de $\mathscr{F}$ en $(u,\wp)$ qui est donc isomorphe à $F_\wp$.

Notons encore :

▹ $F_{\wp,0}$ la sous-extension non ramifiée maximale de $F_\wp$,

▹ Σ_p l'ensemble des plongements $F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$,

▹ $\Sigma_\wp$ l'ensemble des plongements $F_\wp \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ (qui est alors supposé être égal à Σ_p dans cette introduction),

▹ $\Sigma_{\wp,0}$ l'ensemble des plongements $F_{\wp,0} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$,

▹ $d := [F_\wp : \mathbb{Q}_p]$, $d_0 := [F_{\wp,0} : \mathbb{Q}_p]$,

▹ $q := p^{d_0}$, $\quad e := d/d_0$.

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ assez grande pour contenir tous les plongements de $F_\wp$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ avec $\mathscr{O}_E$ son anneau des entiers. Fixons un plongement

$$u_\infty : \mathscr{F} \longhookrightarrow \mathbb{C}$$

et notons encore u_∞ sa restriction à $\mathscr{E}$ ou à F. Fixons de plus un isomorphisme

$$\varsigma : \overline{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \quad \text{tel que } u = \varsigma^{-1} \circ u_\infty : \mathscr{E} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p.$$

Dans cette thèse, on considère les courbes de Shimura unitaires (de type PEL) comme dans [**20**, §2] :on dispose d'un groupe de similitudes unitaires G sur $\mathbb{Q}$ (noté G' dans *loc. cit.*, voir aussi §2.1) vérifiant

$$G(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p^\times \times \mathrm{GL}_2(F_\wp), \tag{1.1.1}$$

(où l'isomorphisme dépend du choix de u) et d'une classe X (notée X' dans [**20**, §2]) de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes $\mathrm{Res}_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \mathbb{G}_m \to G_{\mathbb{R}}$ qui peut s'identifier au demi-plan de Poincaré. Soient $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{A}^S$ l'anneau des adèles hors de S pour un ensemble fini S des places de $\mathbb{Q}$. Au couple (G,X), la théorie de Shimura associe (*cf. loc. cit.*) un système projectif indexé par les sous-groupes ouverts compacts K de $G(\mathbb{A}^\infty)$ de courbes algébriques propres M_K sur $\mathscr{F}$, de sorte que

$$M_K(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} G(\mathbb{Q}) \setminus \big(X \times G(\mathbb{A}^\infty)/K\big).$$

On note (d'après (1.1.1))

$$G(\mathbb{A}^{\infty,\wp}) := G(\mathbb{A}^{\infty,p})\mathbb{Q}_p^\times \subsetneq G(\mathbb{A}^\infty).$$

Pour un sous-groupe ouvert compact H de $G(\mathbb{Q}_p)$, on note (via (1.1.1))

$$H^\wp := H \cap \mathbb{Q}_p^\times.$$