Mémoires

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Numéro 176
Nouvelle série

NOUVEAUX THÉORÈMES D'ISOGÉNIE

É. GAUDRON & G. RÉMOND

2 0 2 3

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 38 € ($ 57)
Abonnement électronique : 113 € ($ 170)
Abonnement avec supplément papier : 167 €, hors Europe : 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Mémoires de la SMF
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`memoires@smf.emath.fr` • `http://smf.emath.fr/`

ISSN papier 0249-633-X; électronique : 2275-3230

ISBN 978-2-85629-948-7

`doi:10.24033/msmf.484`

Directeur de la publication : Fabien DURAND

MÉMOIRES DE LA SMF 176

NOUVEAUX THÉORÈMES D'ISOGÉNIE

Éric Gaudron
Gaël Rémond

Société Mathématique de France 2023

É. Gaudron
Université Clermont Auvergne, CNRS, LMBP, F-63000, Clermont-Ferrand, France.
Courriel : `Eric.Gaudron@uca.fr`

G. Rémond
Institut Fourier, UMR 5582, 100, rue des Maths, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9, France.
Courriel : `Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr`

Soumis le 13 février 2020, révisé le 19 octobre 2020, accepté le 23 février 2021.

***Classification mathématique par sujets* (2000). –** 11G10; 14K02, 11R54, 14K15.

***Mots-clefs.* –** Variété abélienne, isogénie, ordre maximal, ordre principal, anneau de Lefschetz, module de Tate, polarisation, groupe de Brauer, réseau des périodes, théorème des périodes.

***Key words and phrases.* –** Abelian variety, isogeny, maximal order, principal order, Lefschetz ring, Tate module, polarization, Brauer group, period lattice, period theorem.

NOUVEAUX THÉORÈMES D'ISOGÉNIE

Éric Gaudron, Gaël Rémond

Résumé. **–** Étant donné une extension de type fini K du corps des nombres rationnels et une variété abélienne C sur K, nous considérons la classe de toutes les variétés abéliennes sur K isogènes (sur K) à une sous-variété abélienne d'une puissance de C. Nous expliquons comment définir, dans cette classe et de manière naturelle, une variété abélienne $C^\flat$ dont l'anneau des endomorphismes contrôle toutes les isogénies entre éléments de la classe, au sens suivant : si d désigne le discriminant de l'anneau des endomorphismes de $C^\flat$ alors, pour tout couple de variétés abéliennes isogènes dans la classe, il existe une isogénie entre elles dont le noyau est d'exposant au plus d. En outre, nous montrons que ce nombre d permet de majorer plusieurs invariants attachés à un élément quelconque A de la classe, comme le plus petit degré d'une polarisation sur A, le discriminant de son anneau d'endomorphismes ou le cardinal de la partie invariante sous Galois du groupe de Brauer géométrique de A. Lorsque K est un corps de nombres, le théorème des périodes appliqué à $C^\flat$ et à sa période canonique fournit une borne explicite pour d en termes du degré de K, de la dimension de $C^\flat$ et de la hauteur de Faltings de C. Nous en déduisons donc des majorations explicites des quantités mentionnées ci-dessus pour les isogénies, polarisations, endomorphismes et groupes de Brauer, qui améliorent considérablement les résultats antérieurs.

Abstract **(New isogeny theorems). –** Given a finitely generated field extension K of the rational numbers and an abelian variety C over K, we consider the class of all abelian varieties over K which are isogenous (over K) to an abelian subvariety of a power of C. We show that there is a single, naturally constructed abelian variety $C^\flat$ in the class whose ring of endomorphisms controls all isogenies in the class. Precisely, this means that if d is the discriminant of this ring then for any pair of isogenous abelian varieties in the class there exists an isogeny between them whose kernel has exponent at most d. Furthermore we prove that, for any element A in the class, the same number d governs several invariants attached to A such as the smallest degree of a polarisation on A, the discriminant of its ring of endomorphisms or the size of the invariant part of its geometric Brauer group. All these are bounded only in terms of d and the dimension of A. In the case where K is a number field we can go further

and show that the period theorem applies to $C^\flat$ in a natural way and gives an explicit bound for d in terms of the degree of K, the dimension of $C^\flat$ and the stable Faltings height of C. This in turn yields explicit upper bounds for all the previous quantities related to isogenies, polarisations, endomorphisms, Brauer groups which significantly improve known results.

TABLE DES MATIÈRES