PANORAMAS ET SYNTHÈSES 2

SYMÉTRIE MIROIR

Claire Voisin

Société Mathématique de France 1996

Rédigé avec le concours du ministère de l'éducation nationale,
de l'enseignement supérieur et de la recherche (D.I.S.T.N.B.).

SYMÉTRIE MIROIR

Claire Voisin

Ce texte expose certains travaux récents motivés par la mise en évidence du phénomène de symétrie miroir par les physiciens. Un chapitre y est consacré à la géométrie des variétés de Calabi-Yau, tandis que le suivant décrit, à titre de motivation, les idées venues de la théorie quantique des champs et qui sont à l'origine de cette découverte.

Les chapitres suivants traitent d'aspects plus spécialisés du sujet : le travail de Candelas, de la Ossa, Greene, Parkes, où est exploité le fait que sous l'hypothèse des miroirs, la variation de structure de Hodge d'une famille de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 détermine les invariants de Gromov-Witten de son miroir ; la construction de Batyrev, qui exhibe le phénomène de miroirs entre hypersurfaces des variétés toriques de Fano, à l'aide d'une classification combinatoire de ces dernières ; la construction mathématique du potentiel de Gromov-Witten et la preuve de sa propriété cruciale (il satisfait l'équation WDVV), qui permet de construire une connexion plate, sous-jacente à une variation de structure de Hodge dans le cas d'une variété de Calabi-Yau ; et pour finir, le calcul de Givental qui est une justification mathématique mystérieuse du calcul de Candelas et al.

This paper describes recent works motivated by the discovery of the mirror symmetry phenomenon by the physicists. One chapter is devoted to the geometry of Calabi-Yau manifolds, and the next one describes, as a motivation, the ideas from quantum field theory, which led to this discovery.

The other chapters deal with more specialised aspects of the subject : The work of Candelas, de la Ossa, Greene, Parkes, based on the fact that under the mirror symmetry hypothesis, the variation of Hodge structure of a Calabi-Yau threefold determines the Gromov-Witten invariants of its mirror ; Batyrev's construction which exhibits the mirror symmetry phenomenon between hypersurfaces of toric Fano varieties, after a combinatorial classification of the last ones ; the mathematical construction of the Gromov-Witten potential, and the proof of its crucial property (it satisfies the WDVV equation), which allows to construct a flat connection, underlying a variation of Hodge structure in the Calabi-Yau case ; and to conclude, Givental's computation, which is a mysterious mathematical justification of the computation of Candelas et al.

Classification AMS : 14D05 – 14D07 – 14J32 – 14M25 – 32G13 – 32G20 – 32L07 – 81T30 – 81T40 – 53C23 – 53C15.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce texte est la version écrite du cours que j'ai donné à l'Institut Henri Poincaré dans le cadre du semestre de géométrie algébrique du centre Émile Borel au printemps 95.

Le but de ce cours était de présenter les résultats récents liés à la symétrie miroir ; celle-ci étant loin d'être comprise mathématiquement, ces travaux se sont développés dans des directions diversifiées, depuis l'étude approfondie menée par Batyrev des familles d'hypersurfaces à fibré canonique trivial dans les variétés toriques de Fano, et la construction combinatoire de la famille miroir, jusqu'à la découverte du « produit quantique » sur la cohomologie d'une variété symplectique, qui dépasse largement le cadre de la symétrie miroir, mais a été motivée par le souci de définir mathématiquement des objets tels que le potentiel de Gromov-Witten, qui en est un ingrédient essentiel, et d'en prouver la propriété principale, à savoir qu'il satisfait « l'équation WDVV ».

Cette situation éclatée se trouve reflétée dans la division du livre en chapitres autonomes, qui tout en étant liés par des thèmes communs (variation de structure de Hodge, variétés de Calabi-Yau et leurs courbes rationnelles et, bien entendu, symétrie miroir) n'entretiennent pas forcément de liens logiques très structurés.

Cette introduction se propose néanmoins de procéder à une présentation synthétique du sujet, destinée à recentrer le livre autour de la symétrie miroir, et aussi à mettre en évidence le fait que les travaux mathématiques qu'elle a suscités, et qui sont décrits ici, si intéressants soient-ils en eux-mêmes, sont loin d'en fournir une justification aussi tangible que celle proposée par les physiciens dans le langage de la théorie des champs, (et malheureusement sur la base du formalisme de la quantification et des intégrales de Feynman qui semble impossible à justifier rigoureusement).

Les variétés de Calabi-Yau sont les variétés X compactes complexes kählériennes à fibré canonique trivial, c'est-à-dire possédant une forme holomorphe η partout non nulle, appartenant à $H^0(X, \bigwedge^n \Omega_X^n)$, où Ω_X est le fibré cotangent holomorphe de X et où $n = \dim X$.

Dans toute la suite, on supposera

$$H^2(\mathcal{O}_X) = \{0\},$$

bien que des études intéressantes aient été menées dans le cas des surfaces K3, (ce sont les variétés de Calabi-Yau simplement connexes de dimension 2), pour lesquelles cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite. Sous cette condition, le cône de Kähler de X est ouvert dans $H^2(X,\mathbb{R})$ et l'on peut introduire le «cône de Kähler complexifié» de cette variété, qui est l'un des aspects de l'espace des modules considéré par les physiciens. C'est l'ouvert

$$K(X) \subset H^2(X,\mathbb{C})/2i\pi H^2(X,\mathbb{Z})$$

défini par la condition :

$$\omega \in K(X) \Longleftrightarrow \operatorname{Re}\omega \text{ est une classe de Kähler.}$$

La symétrie miroir consiste essentiellement en l'existence d'une famille miroir $\{X'\}$ de variétés de Calabi-Yau de même dimension, telle que $K(X)$ uniformise (c'est-à-dire est un revêtement de) l'espace de modules Déf X des déformations de la structure complexe de X' et $K(X')$ uniformise celui de X. La nature exacte de ce revêtement n'est pas parfaitement comprise, mais il doit être fourni par un «marquage» partiel de la cohomologie de X' (resp. X).

Les courbes elliptiques ($n = 1$) fournissent l'exemple le plus simple de ce phénomène : le cône de Kähler complexifié $K(E)$ (qui ne dépend pas de la structure complexe de E) s'identifie canoniquement, par intégration sur E, à l'ensemble

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}\,;\ \operatorname{Re}\lambda > 0\big\}.$$

D'autre part, l'ensemble des structures complexes marquées sur E s'identifie par l'application des périodes à l'ensemble

$$\mathcal{H} = \big\{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\,\tau > 0\big\}$$

et les translations par $u \in \mathbb{Z}$ sur cet ensemble correspondent simplement à l'action des matrices triangulaires supérieures à diagonale identité et à coefficients entiers sur les marquages d'une courbe elliptique E (c'est-à-dire dans ce cas, les isomorphismes symplectiques $H^1(E,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ muni de la forme symplectique standard). L'application

$$\begin{aligned} K(E) &\longrightarrow \mathcal{H}/\mathbb{Z},\\ \lambda &\longmapsto \tau = -\frac{\lambda}{2i\pi} \bmod \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donne donc une uniformisation telle que prédite par la symétrie miroir.

En dimension supérieure, un phénomène nouveau apparaît : la famille $\{X'\}$ est en général différente de la famille $\{X\}$, les variétés topologiques sous-jacentes étant différentes, simplement parce que leurs nombres de Betti le sont. Cependant, les nombres de Hodge de X', c'est-à-dire les nombres

$$h^{p,q}(X') := \dim H^{p,q}(X') =: \dim H^q(X',\Omega^p_{X'}),$$

se déduisent de ceux de X de la façon suivante.

L'uniformisation

$$K(X) \longrightarrow \text{espace de modules de } X'$$

induit, en un point $\omega \in K(X)$ d'image X', un isomorphisme

$$H^1(\Omega_X) \cong H^1(T_{X'})$$

au niveau des espaces tangents, où l'on a utilisé les identifications naturelles

$$T_{K(X),\omega} \cong H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^1(\Omega_X),$$

la seconde résultant de l'hypothèse $H^2(\mathcal{O}_X) = \{0\}$.

Plus généralement, comme il résulte de la « construction » de la symétrie miroir par les physiciens, on devrait avoir, pour tout p et q, des isomorphismes

$$H^q(\Omega_X^p) \cong H^q(\bigwedge^p T_{X'})$$

Finalement, le choix d'une n-forme holomorphe $\eta \in H^0(K_X)$ (où la forme η est unique à coefficient près) détermine des isomorphismes donnés par le produit intérieur

$$H^q(\bigwedge^p T_{X'}) \cong H^q(\Omega_{X'}^{n-p})$$

qui, composés avec les précédents, fournissent des isomorphismes non canoniques

$$H^q(\Omega_X^p) \cong H^q(\Omega_{X'}^{n-p})$$

et donc une série d'égalités :

$$h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(X').$$

Rappelons finalement que d'après la théorie de Hodge on a pour chaque k une décomposition en somme directe

$$H^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

d'où la relation entre les nombres de Hodge et les nombres de Betti de X :

$$b_k(X) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(X).$$

Lorsque $n = 3$, la comparaison des nombres de Hodge de X et X' entraîne celle des nombres de Betti. En effet :

- l'hypothèse $H^2(\mathcal{O}) = \{0\}$ entraîne $b_2 = h^{1,1}$;
- d'autre part, on a $h^{3,0} = 1$ et $h^{2,1} = h^{1,2}$ (car $H^1(\Omega_X^2)$ et $H^2(\Omega_X)$ sont duaux) ; d'où $b_3 = 2 + 2h^{2,1}$.

Finalement, $H^2(\mathcal{O}) = \{0\}$ équivaut par dualité de Serre à

$$H^1(K_X) = H^1(\mathcal{O}_X) = \{0\}$$

et donc à $b_1(X) = 0$, de sorte que l'on a :

$$\begin{cases} b_1(X') = 0, \\ b_2(X') = \frac{1}{2}\big(b_3(X) - 2\big) = b_4(X'), \\ b_3(X') = 2 + 2b_2(X). \end{cases}$$

Les constructions de familles miroirs dont on dispose actuellement relèvent essentiellement de la géométrie algébrique projective, la plus générale étant celle de Batyrev : celle-ci concerne les désingularisations partielles des hypersurfaces à fibré canonique trivial dans les variétés toriques de Fano. Ces dernières sont les compactifications de $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ à fibré anticanonique ample, et sur lesquelles l'action naturelle de $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ sur lui-même s'étend.

Batyrev montre que ces variétés sont en correspondance bijective avec des polyèdres convexes à sommets entiers dans $\mathbb{R}^{n+1}$, possédant 0 comme unique point entier intérieur, et tels que le polyèdre dual soit également à sommets entiers (propriété dite de réflexivité) : la famille miroir est alors obtenue par désingularisation partielle (en général le procédé de désingularisation n'est pas unique, malheureusement) de la famille des hypersurfaces à fibré canonique trivial dans la variété torique de Fano associée au polyèdre dual.

L'exemple le plus fameux d'une telle construction est celui des physiciens Candelas, de la Ossa, Green, Parkes dans l'article spectaculaire [43], remarquablement expliqué à l'usage des mathématiciens par Morrison [53]. On considère la famille de variétés de Calabi-Yau de dimension 3 donnée par les hypersurfaces lisses de degré 5 dans $\mathbb{P}^4$; une telle hypersurface a pour nombres de Hodge :

$$h^{1,1} = 1, \quad h^{2,1} = 101.$$

La famille miroir doit donc avoir pour nombres de Hodge

$$h^{1,1} = 101, \quad h^{2,1} = 1$$

et le nombre de paramètres pour les déformations de la structure complexe dans cette famille doit être égal à 1.

Cette famille est la suivante : considérons les polynômes quintiques (dépendant d'un paramètre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$) de la forme

$$F_\lambda = \sum_{i=0}^{i=4} X_i^5 + \lambda X_0 \cdots X_4.$$

Chaque polynôme F_λ est invariant par le groupe

$$G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^5 / \operatorname{diag}$$

agissant sur $\mathbb{P}^4$ par multiplication des coordonnées par une racine cinquième de l'unité.

Le sous-groupe $H \subset G$ défini par la condition

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_4) \in H \iff \sum_i \alpha_i = 0 \quad \text{dans } \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

agit sur $X_\lambda := \operatorname{div} F_\lambda$ et l'action induite sur $H^{3,0}(X_\lambda)$ est triviale.

On peut alors montrer que le quotient $\widetilde{X_\lambda/H}$ admet une désingularisation naturelle, qui est de Calabi-Yau. La famille $\{\widetilde{X_\lambda/H}\}$, de dimension 1, est la famille miroir cherchée.

Morrison a expliqué du point de vue de la théorie de Hodge le calcul mené dans [43] ; les ingrédients essentiels sont les suivants. On recherche sur la courbe de coordonnée λ (en fait λ^5) une coordonnée canonique à l'infini ; de telles coordonnées naturelles existent en général sur l'espace de modules d'une variété de Calabi-Yau (ou plutôt la famille de Kuranishi, qui est lisse) et dépendent du choix d'un marquage partiel de la cohomologie : le point est que la monodromie autour de l'infini fournit naturellement un tel marquage.

Le logarithme t de la coordonnée q ainsi produite est alors supposé coïncider via l'application miroir avec la coordonnée naturelle existant sur le cône de Kähler complexifié de la famille initiale. Le second point est que le même marquage partiel de la cohomologie permet également de trivialiser le fibré $\mathcal{H}^{3,0}$, de rang 1, dont la fibre au point λ l'espace vectoriel $H^{3,0}(\widetilde{X_\lambda/H})$. On dispose donc d'une fonction de q donnée par la valeur des « accouplements de Yukawa » (il s'agit d'une forme cubique sur l'espace tangent à la famille), normalisés par la section trivialisante du fibré $\mathcal{H}^{3,0}$ sur le champ de vecteurs logarithmique $q\partial/\partial q$. Le développement en série entière est calculable explicitement et se déduit immédiatement de celui de certaines solutions de l'équation de Picard-Fuchs de la famille $\{X_\lambda\}$.

L'extraordinaire nouveauté mathématique de cet article réside alors dans l'identification de cette série $\psi(q)$ où $q = \mathrm{e}^t$ avec la série

$$5 + \sum_{d>0} N(d)\,\frac{\mathrm{e}^{td}}{1-\mathrm{e}^{td}}$$

où $N(d)$ est le nombre de courbes rationnelles immergées de degré d dans une quintique générale de $\mathbb{P}^4$. (Ce nombre devrait être fini, selon une conjecture de Clemens.)

La prédiction ainsi obtenue pour les $N(d)$ a été vérifiée pour $d \leq 4$, ce qui est tout à fait remarquable, étant donnée l'allure astronomique de ces nombres. Notons d'autre part que malgré le progrès accompli par Kontsevich [51] sur le problème de l'évaluation des $N(d)$, il n'existe actuellement pas de méthode permettant de calculer ces nombres autrement que un à un.

L'identification de ces deux séries est une conséquence de la construction « physique » de la symétrie miroir : la donnée d'une structure complexe sur X et d'un paramètre de Kähler complexifié $\omega = \alpha + i\beta$ déterminent par le théorème de Yau une métrique de Kähler-Einstein, de classe de Kähler α, tandis qu'à β correspond une classe de 2-formes fermées modulo des formes exactes et des formes d'intégrale multiple de $2i\pi$ sur tout cycle de dimension 2 de X. Ces données permettent de construire un « σ-modèle $N{=}2$-supersymétrique » qui est donné par une action $S(\phi,\psi)$, pour ϕ une application d'une surface de Riemann Σ dans X, et ψ une section de $\phi^*(T_X)\otimes S$, S étant le fibré des spineurs correspondant au choix d'une structure Spin sur Σ.

La dépendance de cette action par rapport au choix d'une forme $\widetilde{\beta}$ représentant β n'influe guère sur la théorie, car $\widetilde{\beta}$ ne contribue à S que par le terme $\int_\Sigma \phi^*(\widetilde{\beta})$, de sorte qu'un choix différent $\widetilde{\beta}'$ modifie l'action par un « terme de bord » et par un terme qui prend des valeurs multiples de $2i\pi$ sur les surfaces sans bord : les termes de bord ne contribuent pas aux équations d'Euler-Lagrange décrivant les points critiques de S, et d'autre part seule l'exponentielle de l'action apparaît, par exemple dans le calcul des fonctions de corrélation.

L'action $S(\phi,\psi)$ est invariante (modulo un terme de bord) par une superalgèbre de Lie de dimension infinie de transformations infinitésimales, la « $N{=}2$-superalgèbre de Virasoro », dont la partie impaire, faite de « transformations supersymétriques » se comprend mieux si l'on représente $S(\phi,\psi)$ comme le développement en composantes d'une action $S(\Phi)$ associée aux applications superdifférentiables Φ d'une super-surface de Riemann Σ dans X. La partie paire de cette superalgèbre de Lie est faite de deux copies de l'algèbre de Virasoro, et reflète l'invariance conforme de l'action $S(\phi,\psi)$. La $N{=}2$-supersymétrie de cette action est une conséquence du fait que la métrique est kählérienne.

Les physiciens veulent représenter par quantification certaines fonctionnelles sur l'espace des solutions classiques des équations d'Euler, appelées « observables », sur un espace de Hilbert. La construction d'une telle représentation serait équivalente à la donnée des « fonctions de corrélation » de la théorie, c'est-à-dire les intégrales de Feynman

$$\big\langle \mathcal{O}_1(p_1)\cdots\mathcal{O}_r(p_r)\big\rangle = \int_{\Sigma,\phi,\psi}\prod_i \mathcal{O}_i\big((\phi,\psi)(p_i)\big)\,\mathrm{e}^{-S(\phi,\psi)}\,\mathrm{d}\Sigma\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\psi$$

les p_i étant des points fixés de Σ et les $\mathcal{O}_i$ des formes différentielles sur X, l'intégrale sur Σ signifiant l'intégrale sur les structures complexes de Σ, à isomorphisme près.

Les physiciens ont des arguments qui tendent à prouver que l'invariance par $N{=}2$-supersymétrie de l'action $S(\phi,\psi)$ peut être préservée au stade quantique (c'est-à-dire qu'une extension centrale de la superalgèbre est représentée sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de sorte que son action sur les observables coïncide avec le crochet d'opérateurs dans $\mathcal{H}$) précisément lorsque la métrique sur X est de Kähler-Einstein.

Ceci mène à associer à (X,ω) une représentation de la $N{=}2$-superalgèbre de Virasoro qui est à « charge centrale » $c=3n$. D'après Segal [36], on peut voir cette représentation comme la version infinitésimale d'une « théorie des champs $N{=}2$-superconformes » associée à (X,ω). Selon Gepner, cette correspondance devrait être bijective (à condition de ne considérer que les représentations à « charges U(1) » entières). La symétrie miroir serait la nuance à apporter à cet énoncé et correspondrait au phénomène suivant : la $N{=}2$-superalgèbre admet quatre séries de générateurs

$$G_r^+,\quad G_r^-,\quad \overline{G}_r^+,\quad \overline{G}_r^-,\quad r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2},$$

dont la signification géométrique dépend de l'interprétation de la superalgèbre en termes de transformations supersymétriques : il se trouve que l'on peut construire une involution sur la superalgèbre, agissant sur les générateurs impairs par

$$\begin{aligned} G_r^+ &\longmapsto G_r^-, & G_r^- &\longmapsto G_r^+\,,\\ \overline{G}_r^+ &\longmapsto \overline{G}_r^+, & \overline{G}_r^- &\longmapsto \overline{G}_r^-\,, \end{aligned}$$

compatible avec le supercrochet de Lie.

Cette involution n'a pas de sens géométrique : l'idée est que la représentation obtenue en composant la représentation initiale avec cette involution est la représentation associée au miroir (X', ω'), ou encore qu'on a la même représentation, avec une indexation différente des générateurs qui doit s'interpréter géométriquement par le passage au miroir. De là découle formellement la comparaison des cohomologies de Dolbeault de X et de X' : en effet, suivant Witten [38], on peut identifier

$$\bigoplus_{p,q\geq 0} H^q\big(X, \overset{p}{\bigwedge} T_X\big)$$

au sous-ensemble de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ formé des états « chiraux-chiraux », c'est-à-dire annulés par les générateurs

$$G_r^+,\ \overline{G}_r^+, \quad \big(r \geq -\tfrac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad G_r^-,\ \overline{G}_r^- \quad \big(r \geq \tfrac{1}{2}\big),$$

la bigraduation (p, q) sur le second espace étant fournie par le couple des valeurs propres des opérateurs J_0, $\overline{J}_0$, où les opérateurs J_m, $\overline{J}_m$ pour $m \in \mathbb{Z}$ forment une série de générateurs pairs de la superalgèbre, appelée *courant* $\mathrm{U}(1)$, sur lesquels l'involution agit par

$$J_m \longmapsto -J_m, \quad \overline{J}_m \longmapsto \overline{J}_m.$$

De même

$$\bigoplus_{p,q\geq 0} H^q\big(X, \overset{p}{\bigwedge} \Omega_X\big)$$

s'identifie à l'ensemble des états « antichiraux-chiraux », c'est-à-dire annulés par

$$G_r^-,\ \overline{G}_r^+, \quad \big(r \geq -\tfrac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad G_r^+,\ \overline{G}_r^-, \quad \big(r \geq \tfrac{1}{2}\big),$$

la bigraduation $(-p, q)$ sur le second espace étant fournie par le couple des valeurs propres des opérateurs J_0, $\overline{J}_0$. Par définition les états chiraux-chiraux d'une théorie sont les états antichiraux-chiraux de la théorie obtenue en composant avec l'involution qui échange G^+ et G^- et la bigraduation subit simplement le changement $(p, q) \mapsto (-p, q)$, correspondant au changement de signe de J_0. Ce qui précède fournit donc une série d'isomorphismes

$$H^q(\Omega_X^p) \cong H^q(\overset{p}{\bigwedge} T_{X'})$$

pour le miroir (X', ω') de (X, ω).

Finalement, les hypothèses de la théorie des champs conformes (et plus particulièrement la correspondance états-champs d'opérateurs) permettent de construire un produit gradué sur l'espace d'états chiraux-chiraux (resp. antichiraux-chiraux), et en particulier puisque cet espace est de rang 1 en bidegré (n, n) (resp. $(-n, n)$), une forme homogène de degré n sur sa composante de bidegré $(1, 1)$ (resp. $(-1, 1)$), qui est isomorphe à $H^1(T_X)$ (resp. $H^1(\Omega_X)$).

L'interprétation de ces formes (les accouplements de Yukawa physiques) en termes de fonctions de corrélation du σ-modèle déterminé par (X, ω), et le développement asymptotique des intégrales de Feynman permettent alors à Witten [38] de décrire les accouplements obtenus sur $H^1(\Omega_X)$ et $H^1(T_X)$ respectivement, au moins dans le cas $n = 3$.

Le premier, qu'on notera Y^ω, ne dépend pas de la structure complexe de X et dépend par contre du paramètre ω ; le second, que l'on notera Y^η, ne dépend au contraire que de la structure complexe de X, et du choix d'une forme holomorphe $\eta \in H^{3,0}(X)$, dont le carré reflète le choix d'un isomorphisme $H^3(\wedge^3 T_X) \cong \mathbb{C}$. Witten donne les descriptions suivantes :

- la forme Y^η s'identifie au composé

$$S^3 H^1(T_X) \longrightarrow H^3(\overset{3}{\wedge} T_X) \overset{\eta^2}{\cong} \mathbb{C}\,;$$

- la forme Y^ω est donnée par la formule

$$Y^\omega(\gamma) = \int_X \gamma^3 \ + \sum_{0\neq A\in H_2(X,\mathbb{Z})} N(A)\exp\Big(-\int_A \omega\Big)\Big(\int_A \gamma\Big)^3$$

où $N(A)$ est un nombre rationnel qui est un substitut adéquat pour le nombre de courbes rationnelles de classe A dans X, et est obtenu par une intégration sur l'ensemble des courbes rationnelles de classe A lorsque celui-ci n'est pas discret.

Comme les couples miroirs (X,ω) et (X',ω') ont par définition les mêmes théories conformes associées, leurs accouplements de Yukawa vont s'identifier *via* les identifications

$$H^1(T_X) \cong H^1(\Omega_{X'}), \quad H^1(T_{X'}) \cong H^1(\Omega_X)$$

pour un choix adéquat de η et η'.

C'est de là — et en supposant que le choix naturel de η' mentionné plus haut est le bon — que Candelas, de la Ossa, Green et Parkes déduisent l'identité des deux séries et donc la valeur des $N(d)$; bien entendu, la démarche suppose qu'on ait déterminé *a priori* la forme de l'application miroir, ce qui se fait par les coordonnées canoniques et qui est le point le plus délicat de [43].

Cette théorie donne un caractère d'évidence à la symétrie miroir qu'aucune approche mathématique n'a pu égaler jusqu'à présent.

Néanmoins, on ne peut guère la considérer comme satisfaisante du fait qu'elle repose sur la construction hypothétique de la correspondance entre variétés de Calabi-Yau munies d'un paramètre de Kähler complexifié et théories quantiques des champs $N{=}2$-superconformes. Par contre, il semble impossible, au vu de la justesse des prédictions issues de cette démarche, de ne pas admettre l'existence d'une telle correspondance ; le problème qui se pose naturellement, et qui paraît théoriquement plus important que la symétrie miroir elle-même, est de réaliser mathématiquement cette correspondance.

Les progrès mathématiques en direction d'une compréhension du principe de la symétrie miroir, dépassant la construction et l'étude d'exemples, résident essentiellement dans la construction de structures analogues sur les deux espaces de modules $K(X)$ et $\mathrm{Déf}\,X$ et dans la formulation de la symétrie miroir en termes d'identification de ces structures ; ces structures se formulent et se décrivent en termes de variations de structure de Hodge, qui sont l'objet mathématique le plus fin associé à une déformation de structure complexe.

La première analogie entre ces deux espaces de modules est la suivante. Rappelons que $K(X)$ est ouvert dans $H^2(X,\mathbb{C})/2i\pi H^2(X,\mathbb{Z})$ et donc admet naturellement une structure plate, c'est-à-dire la donnée locale d'un système de coordonnées, défini à des transformations affines près ; un premier résultat facile est l'existence d'une telle structure sur Déf X, dépendant d'un marquage partiel de la cohomologie $H^n(X,\mathbb{Z})$, et donnée essentiellement par les périodes d'un générateur de $H^{n,0}(X)$ sur certaines classes d'homologie de X, qui donnent des coordonnées sur Déf X. L'application miroir entre $K(X)$ et Déf X' est alors pratiquement déterminée par la condition de compatibilité avec ces structures plates.

Comme mentionné plus haut, on dispose pour une variété kählérienne X de la décomposition en somme directe de chacun de ses groupes de cohomologie $H^k(X,\mathbb{C}) \cong H^k(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$:

$$H^k(X,\mathbb{C}) \ = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

fournie par la théorie de Hodge et satisfaisant un certain nombre de conditions. Par exemple, $H^{p,q}(X)$ est le conjugué complexe de $H^{q,p}(X)$ et, pour $k = n = \dim X$, $H^{p,q}(X)$ est orthogonal à $H^{p',q'}(X)$ relativement à la forme d'intersection $\langle\ ,\ \rangle$ de $H^n(X)$ pour $(p',q') \neq (n-p,n-q)$. L'entier k étant fixé, l'application des périodes locale (ou marquée) de X associe à une déformation X_t de X, accompagnée d'un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de X_t avec X induisant un isomorphisme $H^k(X_t) \cong H^k(X)$, la décomposition de Hodge de X_t sur l'espace vectoriel fixé $H^k(X,\mathbb{C})$.

Il est plus agréable de considérer la variation correspondante de la filtration de Hodge

$$F^iH^k(X_t) = \bigoplus_{p\geq i} H^{p,k-p}(X_t)$$

qui jouit des deux propriétés remarquables suivantes :

- $F^iH^k(X_t)$ varie holomorphiquement avec t ;
- la différentielle de l'application des périodes satisfait la condition de « transversalité » de Griffiths

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(F^iH^k(X_t)\big) \subset F^{i-1}H^k(X_t).$$

L'application des périodes est fréquemment injective et pour les variétés de Calabi-Yau ; on peut montrer qu'elle est immersive pour $k = n$.

Le problème est que précisément à cause de la condition de transversalité, qui est une équation différentielle généralement non triviale, l'application des périodes n'est presque jamais surjective, de sorte qu'elle ne peut que rarement être utilisée telle quelle pour décrire l'espace de modules des déformations de la structure complexe d'une variété X.

Dans le cas des variétés de Calabi-Yau, il serait très intéressant de comprendre le lien entre l'application des périodes et la construction de la théorie conforme des champs proposée par les physiciens ; il n'est pas clair que la seconde doive déterminer la première, mais sans aucun doute la relation existe puisque, comme on l'a noté plus haut, les espaces $H^{p,q}(X)$ sont calculables du point de vue de la théorie superconforme associée à X.