Astérisque

FRANCOIS LAUDENBACH

# Topologie de la dimension trois homotopie et isotopie

*Astérisque*, tome 12 (1974)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1974__12__1_0>

## TABLE DES MATIÈRES

CONTENTS

# Introduction

## DEUX PROBLÈMES SUR LES DIFFÉOMORPHISMES

Ce texte correspond à une série d'exposés faits au Collège de France dans le cadre du cours Peccot 1973. Dans la catégorie des variétés $\mathcal{C}^\infty$ de dimension 3, en général compactes et sans bord, on se propose d'étudier les deux problèmes suivants :

Problème I (Existence) : Une équivalence d'homotopie est-elle homotope à un difféomorphisme ?

Problème II (Unicité) : Deux difféomorphismes homotopes sont-ils isotopes ?

Même si l'on admet la conjecture de Poincaré, on sait que le problème I n'a pas toujours de solution : il existe des espaces lenticulaires qui ont le même type d'homotopie sans avoir le même type d'homotopie simple (a fortiori elles ne sont pas difféomorphes), leur torsion de Franz-Reidemeister étant distinctes ; en même temps le premier groupe de Whitehead $Wh_1(\pi)$ de leur groupe fondamental $\pi$ n'est pas trivial ([M7],[R1]). En outre, d'après les récents travaux de Hendriks [H7], il existe une autre obstruction au problème I, indépendante de la précédente : l'obstruction au scindement le long d'une sphère non homotope à zéro (voir chap. V).

En ce qui concerne le problème II, à ma connaissance personne n'a encore dégagé d'obstruction ni même trouvé un contre-exemple. Mais les travaux de Hatcher et Wagoner [H5] (théorie d'obstruction au problème de la pseudo-isotopie en grande dimension) laissent à penser que, dans certaines conditions sur le second groupe de Whitehead de $\pi$, on aurait des chances de trouver des difféomorphismes homotopes (même pseudo-isotopes) à l'identité et non isotopes à l'identité.

Je me propose de rassembler tous les cas jusqu'ici connus où les problèmes I et II admettent des réponses positives. Dans [N1], F. Waldhausen a résolu ces deux problèmes pour la classe des variétés orientables irréductibles et suffisamment grandes ; elle a été étendue par W. Heil [H1] au cas non-orientable (variétés $\mathbb{P}^2$-irréductibles suffisamment grandes). Au chapitre II, je reprends l'exposé de cette question en y ajoutant une étude des lacets de difféomorphismes sur de telles variétés ; par cette étude je réponds à l'une des questions posées par Waldhausen lors d'une rencontre organisée en Juillet 1973 par l'Université du Sussex (G.B.).

Dans [L3], j'ai résolu le problème II pour les sommes connexes d'exemplaires de $S^2 \times S^1$ ; l'outil de base y est un théorème d'isotopie de sphères plongées dans une variété satisfaisant à la conjecture de Poincaré. Au chapitre III, je propose une démonstration sensiblement plus simple pour ce théorème, et je donne le théorème d'isotopie de plongements de sphères. Ce dernier a un correspondant algébrique sous la forme d'un théorème qui compare entre elles les décompositions d'un groupe en produit libre (chapitre IV) ; dans ce chapitre, je prouve aussi par la topologie algébrique (cohomologie du groupe fondamental) l'unicité à homotopie près de la sphère, dite de Kneser, qui réalise géométriquement une décomposition libre du groupe fondamental.

Ce dernier résultat est l'outil de base pour attaquer au chapitre V le problème du scindement d'une équivalence d'homotopie le long d'une sphère. J'y développe la démonstration d'un théorème obtenu avec H. Hendriks sous la forme où elle a été annoncée dans [H8] ; nous avons par ailleurs donné une démonstration plus algébrique pour ce théorème [H8']. En mettant ensemble tous les résultats exposés dans ce cours et en utilisant un travail fait par