Astérisque

MICHEL ENGUEHARD

Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques

Astérisque, tome 181-182 (1990), p. 157-171

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__181-182__157_0>

Isométries parfaites entre blocs de groupes symétriques

Michel Enguehard

Introduction

Soit p un nombre premier. Un p-bloc b d'un groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ est défini par un p-cœur, c'est-à-dire une partition sans p-crochet ; si ce p-cœur est une partition de l'entier k, $N = (n-k)/p$ est un entier : c'est le "poids" du bloc (voir [J–K], chapitres 2 et 6). Il est connu de longue date que le poids est un invariant très significatif d'un p-bloc d'un groupe symétrique. Deux blocs de même poids ont le même nombre de caractères ordinaires, le même nombre de caractères modulaires (G. de B. Robinson [Ro.1]), et leurs matrices de Cartan ont mêmes invariants de similitude (M. Osima, [Os.1] [Os.2]). On a plus : les matrices de décomposition ont également mêmes invariants de similitude et les centres des algèbres des blocs sont isomorphes. On présente ces propriétés en exhibant des isométries "parfaites" au sens de M. Broué ([Br.2]) entre les groupes de Grothendieck des blocs correspondants (notre théorème 11).

L'existence de ces isométries est déduite de la formule de Murnaghan-Nakayama (voir 2), autrement dit de la connaissance —théorique— des valeurs des caractères irréductibles. On aurait aimé, dans l'optique du théorème 3.1 de [Br.2], exhiber une isométrie parfaite à l'aide d'un objet parfait dans la catégorie dérivée envisagée par M. Broué (et notée ${}_b\mathbf{Deb}$) dans l'article cité. Au moins peut-on espérer que l'éventuel bicomplexe coupable ne se cachera pas très longtemps.

Un résultat nouveau portant sur les blocs des groupes symétriques implique en général un résultat nouveau portant sur les blocs des groupes linéaires, et un article sur ce sujet est prévu, démontrant l'existence d'isométries parfaites entre certains blocs de groupes linéaires ou unitaires (*). D'autre part, il est clair qu'un travail analogue est possible à propos de formules dérivées de (ou analogues à) la formule de Murnaghan-Nakayama, par exemple sur les caractères de certains produits

(*) juin 88 : l'existence d'isométries parfaites entre blocs de groupes linéaires ou de groupes unitaires de même poids a fait l'objet d'une conférence au colloque de Bad Honnef "Darstellungstheorie endlicher Gruppen und endlich-dimensionaler Algebren", 30 juin 1988 voir [En.2]

S.M.F.
Astérisque 181-182 (1990)

en couronne (formule d'Osima, [Os.3]), sur ceux des groupes de représentations des groupes symétriques (formules de Morris [Mo]) ou mieux faisant intervenir des symboles au lieu de partitions telles la formule de R. Boyce sur les produits scalaires entre caractères unipotents et caractères de Deligne-Lusztig ([Bo]) dans les groupes de type classique et la formule de Asai (Fong-Srinivasan [F-S], (3.1) (3.2)) sur le foncteur de Lusztig R_L^G; dans ces dernières apparaît une géométrie de "e-crochets" et "e-cocrochets" sur les symboles admettant des e-décompositions ([Ol]). Sans trop se hasarder on peut en espérer des applications aux blocs des groupes de type classique (*).

Le groupe de Grothendieck d'un groupe symétrique est décomposé en somme directe selon une méthode déjà utilisée par Osima [Os.2], et qui est une variante *adhoc* de la décomposition de l'espace des fonctions centrales sur un groupe fini à l'aide des nombres de décomposition généralisés. La décomposition abstraite $x = x_p x_{p'}$ est remplacée par une décomposition "concrète" $x = x_{(p)} x_{(p')}$ où $x_{(p)}$ est le produit des cycles de longueur divisible par p dans la domposition standard en produit de cycles de supports disjoints. Bien entendu cette décomposition du groupe de Grothendieck croise convenablement la décomposition par blocs. Soient alors b et b' deux blocs de groupes symétriques de même poids. L'ensemble des classes d'éléments (x) telles $x = x_{(p)}$ et que le centralisateur de x contienne un bloc b_x défini par le même cœur que le bloc initial $b = b_1$ est en bijection naturelle avec son analogue relativement à b' ; pour chaque classe (x) est définie une isométrie I_x entre les groupes de Grothendieck de b_x et de $b'_{x'}$. Ici intervient un théorème de type combinatoire démontré dans [En.1] ; dans ce théorème la bijection habituelle entre partitions de p-cœurs différents via le "p-quotient" (ou "star-diagram") est assortie d'une relation entre signatures des crochets si bien que les formules de Murnaghan-Nakayama se correspondent via I_x. Il en résulte que I_x échange les sous-groupes engendrés par les caractères projectifs (théorème 9). Il est alors facile d'en déduire que l'isométrie de b vers b' est parfaite. Il est clair que l'on est en présence d'un système local d'isométries, compatible à la fusion au sens de M. Broué (voir ? dans ces actes) mais la décomposition non abstraite utilisée permet une démonstration plus rapide.

(*) décembre 88 : un article est en préparation sur les groupes de type **B**, **C** et **D**, basé sur un théorème combinatoire analogue à notre théorème 8, et relatif à la géométrie des "cocrochets" de symboles ; un autre est prévu sur les extensions du groupe symétrique.

Les résultats présentés ont fait l'objet d'une conférence au séminaire sur la théorie des groupes finis, à Paris en mars 1988, et du rapport [En.1] partiellement repris ici.

Je tiens à remercier Paul Fong qui, par une lecture attentive et amicale a grandement contribué à réduire la liste prévisible d'errata.

1. Quelques notations.

Soit un corps $\mathcal{K}$ de caractéristique nulle, complet pour une valuation discrète et dont l'anneau de valuation $\mathcal{A}$ a un corps résiduel $\mathcal{F}$ de caractéristique p. Si G est un groupe fini, on note $\mathcal{R}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{K}G$-modules de type fini; on considère que $\mathcal{R}(G)$ est un groupe abélien de fonctions centrales sur G, admettant une base formée des caractères des représentations absolument irréductibles de G.

Reprenant des notations analogues à celles de J.-P. Serre [Se], on note $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(G)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules projectifs de type fini et $e_G\colon \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(G) \to \mathcal{R}(G)$ l'injection canonique. Rappelons que l'image de e_G est le sous-groupe des éléments de $\mathcal{R}(G)$ de valeur nulle sur tout élément de G dont l'ordre est divisible par p ([Se], par. 16, Th. 36).

Soient enfin $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$ le groupe de Grothendieck de G sur $\mathcal{F}$, assimilé au groupe des fonctions centrales sur G engendré par les caractères de Brauer des représentations de G sur $\mathcal{F}$, et $d_G\colon \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(G)$ l'application de décomposition. Les applications e_G et d_G sont adjointes (on suppose $\mathcal{K}$ assez gros) et $c_G = d_G \circ e_G$ est l'application dite de Cartan.

L'ensemble des partitions d'un entier n est noté $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P} := \cup_{n\in \mathbb{N}}\mathcal{P}_n$.

2. Caractères des groupes symétriques et formule de Murnaghan-Nakayama

Tous les groupes symétriques considérés, en particulier $\mathcal{S}_6$, sont munis de leur représentation naturelle. Si $m, n \in \mathbb{N}$ et $m \leq n$, il existe donc une injection naturelle de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$, définie à automorphismes intérieurs de $\mathcal{S}_n$ près. Une telle famille d'injections définit elle-même une injection de l'ensemble des classes de conjugaison de $\mathcal{S}_m$ dans l'ensemble des classes de conjugaisons de $\mathcal{S}_n$ (par adjonction de $(n-m)$ points fixes).

Les classes de conjugaison de $\mathcal{S}_n$, tout comme ses représentations simples, sont paramétrées par $\mathcal{P}_n$. Si $\lambda \in \mathcal{P}_n$, notons χ_λ le caractère irréductible correspondant et z_λ l'ordre du centralisateur dans $\mathcal{S}_n$ d'un élément de la classe définie par λ. Pour combiner la formule de Murnaghan-Nakayama (voir 3) et le théorème combinatoire rappelé en 8, introduisons les notations suivantes :

Si $x \in \mathcal{S}_n$, soit $x_{(p)}$ (resp. $x_{(p')}$) le produit des cycles de la décomposition en cycles de x dont la longueur est divisible par p (resp. non divisible par p). On a clairement $x = x_{(p)}x_{(p')} = x_{(p')}x_{(p)}$; cette décomposition se transporte par conjugaison dans $\mathcal{S}_n$ et $x_{(p')}$ est d'ordre premier à p, $x_{(p)}$ d'ordre divisible par p ou égal à 1. Notons que si $x_{(p)}$ et $y_{(p)}$ sont conjugués dans $\mathcal{S}_n$, les p-composantes x_p et y_p de x et de y le sont aussi. La classe de $x_{(p)}$ dans $\mathcal{S}_n$ est caractérisée par une partition dont les composantes autres que 1 sont divisibles par p. Au contraire, la classe de $x_{(p')}$ est caractérisée par une partition dont toutes les composantes sont premières à p. Inversement, si $\beta = \{\beta_j\}_{1\leq j\leq r}$ est une partition (dont les composantes sont en ordre décroissant) de $b = \sum_j \beta_j$, à la partition $\{p\beta_j\}_{1\leq j\leq r}$ de pb, laquelle sera notée $p\cdot\beta$, est associée une classe de $\mathcal{S}_{pb}$, ou encore, si $n \geq pb$, une classe d'éléments de $\mathcal{S}_n$, admettant $(n-pb)$ points fixes. Notons $\mathcal{P}_m^{(p')}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}_m$ dont toute composante est première à p. Il est clair que si $x \in \mathcal{S}_n$, et si $x_{(p')}$ admet pb points fixes, la classe de $x_{(p')}$ est définie par un élément de $\mathcal{P}_{n-pb}^{(p')}$. La décomposition précédente établit donc une bijection

$$\mathcal{P}_n \to \cup_{\{b\in \mathbb{N} | 0\leq pb\leq n\}} \mathcal{P}_b \times \mathcal{P}_{n-pb}^{(p')}.$$

Notons que si par cette bijection λ a pour image (β, ν), on a $z_\lambda = z_{p.\beta} z_\nu$.

Si $\lambda \in \mathcal{P}_n$, $a \in \mathbb{N}$ et $I \subset \mathbb{N}$, notons $\mathcal{C}_a(\lambda)$ (resp. $\mathcal{C}_I(\lambda)$) l'ensemble des crochets de λ de longueur a (resp. dont la longueur appartient à I). Si $\gamma \in \mathcal{C}_a(\lambda)$, l'ablation de γ à λ fournit une partition de $(n-a)$, qui est notée $\gamma * \lambda$. La signature de γ (voir [J–K] ou [En], 2.2 et 2.3 ; en termes classiques, elle vaut $(-1)^{l(\gamma)}$, où $l(\gamma)$ est la "longueur de jambe" de γ) est notée $\epsilon(\gamma)$. La formule de Murnaghan-Nakayama s'écrit, si $(x,y) \in \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_d$, $m + d = n$ et y est un cycle de longueur d,

$$[\lambda](xy) = \sum_{\gamma\in\mathcal{C}_d(\lambda)} \epsilon(\gamma)[\gamma * \lambda](x).$$

Soit alors $e \in \mathbb{N}^\times$. Soit l'équivalence la plus fine dans l'ensemble des partitions telle que

"si $\gamma \in \mathcal{C}_{e\mathbb{N}}(\lambda)$, λ et $\gamma * \lambda$ sont équivalents."

Soit $\mathcal{B}$ une classe selon cette équivalence. Il existe alors un unique $\kappa \in \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{C}_e(\kappa) = \emptyset$; la partition κ est dite "cœur de $\mathcal{B}$". Supposons que κ soit une partition