

Astérisque

LLUIS PUIG

Algèbre de source de certains blocs des groupes de Chevalley

Astérisque, tome 181-182 (1990), p. 221-236

http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__181-182__221_0

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES DE SOURCE DE CERTAINS BLOCS DES GROUPES DE CHEVALLEY

par Lluís PUIG

1. INTRODUCTION

1.1. Le point de départ du mémoire a été la constatation – il y a quelques années – qu'un simple argument sur des dimensions permet de déterminer l'algèbre de source de certains blocs des groupes de Chevalley. L'argument est le suivant : d'une part, on sait que toute algèbre de source d'un bloc b doit contenir l'algèbre de groupe convenablement tordue de l'extension d'un groupe de défaut P de b par le quotient d'inertie E d'un des blocs de $C_G(P)$ associés b (voir [4], proposition 14.6); et d'autre part, pour des choix convenables de b dans les groupes de Chevalley – ceci a été la constatation – l'algèbre A du bloc possède un idempotent i fixe par P – d'expression similaire celle de l'unité de l'algèbre de Hecke – tel que iAi contienne une algèbre de source du bloc et que l'on ait

$$1.1.1. \quad \dim(iAi) \leq |P| |E| .$$

Bien sûr, ceci est loin d'être le cas général dans ces groupes et en conséquence notre démarche n'a rien de systématique, nos hypothèses sur b (cf. §3) étant des conditions *ad hoc* pour faire apparaître la situation voulue. Nous avons exposé un résultat de ce type à l'Université de Essen en février 1985.

1.2. Ici nous allons discuter une situation plus générale demandant un argument plus sophistiqué – toujours sur le thème des dimensions – qui tient compte de la bonne connaissance des algèbres de source des blocs à structure locale nilpotente (voir [5], théorème 1.6 et 1.7). De plus, nous avons compris que l'argument dimensionnel reste utile même lorsque l'algèbre de source n'est déterminée "qu'en partie" : cet argument nous renseigne – dans une famille de blocs bien plus large – sur *l'algèbre plongée associée à un groupe pointé local* (cf. 2.4 ou [4], 2.13) qui n'est pas nécessairement maximal. Cette connaissance partielle de l'algèbre de source peut être suffisante pour le calcul de certains invariants du bloc. A titre d'exemple, nous discutons ici la possibilité de déterminer certains nombres de décomposition généralisés.

1.3. Soient donc p un nombre premier et G un groupe de Chevalley (ou du type de Lie, si l'on préfère) en caractéristique différente de p . Les p -blocs b de G que nous allons considérer sont les blocs induits – au sens soit de Brauer, soit de Harish-Chandra – à partir des p -blocs cuspidaux b' , des sous-groupes de Levi rationnels H de G , ayant un groupe de défaut P tel que $C_H(P) = C_G(P)$ et une structure locale nilpotente (*). Par bloc "cuspidal" b' de H nous entendons un bloc dont tous les caractères irréductibles associés sont cuspidaux au sens de Harish-Chandra : il est alors clair qu'il satisfait à la condition suivante :

1.3.1. Il existe un p' -sous-groupe I de G , qui est normalisé par H et le rencontre trivialement, tel que $b'e_I x e_I = 0$ pour tout $x \in G - I.N_G(H).I$, où e_I est l'idempotent $\frac{1}{|I|} \sum_{y \in I} y$ de l'algèbre de groupe de I .

Or, il se trouve que notre démarche ne dépend que de cette condition ; ainsi – bien que nous ne connaissions pas d'autre situation où 1.3.1 est satisfaite que celle décrite ci-dessus – il nous a semblé plus commode pour l'exposition d'oublier le caractère spécifique de G .

Ce travail est divisé en quatre sections. Dans la section 2, nous introduisons brièvement les notations et la terminologie utilisées, en donnant quelques compléments sur la fusion. Dans la section 3, nous énonçons notre résultat principal et discutons la possibilité de l'utiliser pour le calcul des nombres de décomposition généralisés. La section 4 contient la démonstration de notre résultat principal.

2. NOTATIONS, TERMINOLOGIE ET RÉSULTATS DE BASE

2.1. Nous empruntons les notations et suivons la terminologie développées dans [2] et [4]. Néanmoins, nous rappelons brièvement la plupart de celles qui sont employées ici. Dans tout ce mémoire, p est un nombre premier, k un corps algébriquement clos de caractéristique p et $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet, ayant k comme corps résiduel (le cas $\mathcal{O} = k$ n'est pas exclu).

2.2. Soit G un groupe fini. Une G -algèbre intérieure est une $\mathcal{O}$ -algèbre A associative, unitaire et $\mathcal{O}$ -libre de rang fini, munie d'un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow A^*$; si $x, y \in G$ et $a \in A$, on écrit $x.a.y$ au lieu de $\varphi(x)a\varphi(y)$ et on pose $a^x = x^{-1}.a.x$.

(*) Dans les exemples que nous connaissons P est le p -sous-groupe de Sylow d'un tore maximal T de H de sorte que $C_H(P) = T$, et b' est le bloc induit, au sens de Brauer, du bloc de T déterminé par un p' -caractère linéaire appartenant à une orbite régulière de $N_H(T)/T$ sur $\text{Irr}_K(T)$.

Si H est un groupe fini et $\psi : H \rightarrow G$ un homomorphisme, on désigne par $\text{Res}_\psi(A)$ la H -algèbre intérieure formée par A munie de $\psi \circ \varphi : H \rightarrow A^*$; lorsque H est un sous-groupe de G et ψ l'homomorphisme défini par l'inclusion $H \subset G$, on pose $\text{Res}_H^G(A) = \text{Res}_\psi(A)$. Si $\mathcal{O}$ est de caractéristique zéro et $\mathcal{K}$ est son corps des fractions, $\text{Irr}_K(A)$ désigne l'ensemble des caractères des $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} A$ -modules simples et pour chaque $\chi \in \text{Irr}_K(A)$ et chaque $x \in G$, on écrit $\chi(x)$ au lieu de $\chi(\varphi(x))$; lorsque $A = \mathcal{O}Gb$ où b est un bloc de G , on note $\text{Irr}_K(G, b)$ cet ensemble.

2.3. Un *groupe pointé* H_β sur A est un couple formé d'un sous-groupe H de G et d'une classe de conjugaison β d'idempotents primitifs de l'algèbre A^H d'éléments $a \in A$ tels que $a^x = a$ pour tout $x \in H$; on dit alors que β est un *point* de H sur A et on désigne par $\mathcal{P}_A(H)$ l'ensemble de ces classes. Si P_γ est un autre groupe pointé sur A , on écrit $P_\gamma \subset H_\beta$ lorsque $P \subset H$ et pour tout $i \in \beta$ il existe $j \in \gamma$ tel que $jAj \subset iAi$. On pose

$$2.3.1 \quad A(P) = A^P / (\sum_Q A_Q^P + J(\mathcal{O}).A^P)$$

où Q parcourt l'ensemble des sous-groupes propres de P et A_Q^P désigne l'idéal des traces relatives de Q à P des éléments de A^Q (cf. [4], 2.8), on note

$$2.3.2 \quad \text{Br}_P : A^P \rightarrow A(P)$$

l'homomorphisme canonique, et on dit que P_γ est *local* si $\text{Br}_P(\gamma) \neq \{0\}$; dans ce cas, γ est appelé *point local* de P sur A et on note $\mathcal{LP}_A(P)$ l'ensemble de ces points ; de plus, si $P = \langle u \rangle$ on dit que u_γ est un *élément pointé local* et $u_\gamma \in H_\beta$ équivaut à $P_\gamma \subset H_\beta$. Rappelons que (cf. [2], théorème 1.2)

2.3.3. un *groupe pointé local* P_γ sur A tel que $P_\gamma \subset H_\beta$ est *maximal* pour cette condition si et seulement si $\beta \subset A_P^H$ et H opère transitivement sur leur ensemble.

2.4. Soit A' une autre G -algèbre intérieure. Un *homomorphisme* $f : A \rightarrow A'$ est un homomorphisme d'algèbres (non nécessairement unitaire) tel que $f(x.a.y) = x.f(a).y$ pour tout $a \in A$ et tout couple $x, y \in G$. Un *exomorphisme* $\tilde{f} : A \rightarrow A'$ est l'ensemble des homomorphismes obtenus en composant un homomorphisme $f : A \rightarrow A'$ avec tous les automorphismes intérieurs de A et de A' ; si H est un sous-groupe de G , on note

$$2.4.1. \quad \text{Res}_H^G(\tilde{f}) : \text{Res}_H^G(A) \rightarrow \text{Res}_H^G(A')$$

l'exomorphisme de $\text{Res}_H^G(A)$ dans $\text{Res}_H^G(A')$ qui contient $\tilde{f}$. Soient respectivement H_β et $P_{\gamma'}$ des groupes pointés sur A et A' ; si $P \subset H$ on désigne par $m(\tilde{f})_{\gamma'}^\beta$, le nombre

d'éléments de γ' qui interviennent dans une décomposition dans A'^P de $f(i)$ où $i \in \beta$. On dit que $\tilde{f}$ est un *plongement* si $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et $\text{Im}(f) = f(1)A'f(1)$; dans ce cas, il existe un unique point β' de H sur A' tel que $f(\beta) \subset \beta'$: nous désignons souvent β et β' par la même lettre. Une *algèbre plongée* associée à H_β est un couple formé d'une H -algèbre intérieure A_β et d'un plongement $\tilde{f}_\beta : A_\beta \rightarrow \text{Res}_H^G(A)$ tels que $f_\beta(1) \in \beta$. Si P_γ est un groupe pointé local maximal tel que $P_\gamma \subset H_\beta$, on dit que A_γ est une *algèbre de source* de A_β .

2.5. Soient P_γ et Q_δ des groupes pointés sur A . Un *exomorphisme* $\tilde{\varphi} : Q \rightarrow P$ est l'ensemble d'homomorphismes obtenus en composant un homomorphisme $\varphi : Q \rightarrow P$ avec tous les automorphismes intérieurs de P et de Q . On dit alors que $\tilde{\varphi}$ est un *G-exomorphisme* de Q_δ dans P_γ s'il existe $x \in G$ tel que $(Q_\delta)^x \subset P_\gamma$ et $\varphi(u) = u^x$ pour tout $u \in Q$; de même, on dit que $\tilde{\varphi}$ est une *A-fusion* de Q_δ dans P_γ si $\text{Ker}(\varphi) = \{1\}$ et il existe un plongement $\tilde{f}_\varphi : A_\delta \rightarrow \text{Res}_\varphi(A_\gamma)$ tel que

$$2.5.1. \quad \text{Res}_1^Q(\tilde{f}_\delta) = \text{Res}_1^P(\tilde{f}_\gamma) \circ \text{Res}_1^Q(\tilde{f}_\varphi) ;$$

on désigne respectivement par $E_G(Q_\delta, P_\gamma)$ et $F_A(Q_\delta, P_\gamma)$ les ensembles des G -exomorphismes et des A -fusions de Q_δ dans P_γ , et on pose

$$2.5.2. \quad E_G(P_\gamma) = E_G(P_\gamma, P_\gamma) \quad \text{et} \quad F_A(P_\gamma) = F_A(P_\gamma, P_\gamma) .$$

2.6. Rappelons que (cf. [3], 2.10)

$$2.6.1. \quad E_G(Q_\delta, P_\gamma) = F_A(Q_\delta, P_\gamma) \cap E_G(Q, P)$$

où $E_G(Q, P)$ est l'ensemble des exomorphismes de Q dans P induits par les automorphismes intérieurs de G . De plus, si R est un sous-groupe de P ,

2.6.2. *pour tout $\varphi \in \text{Hom}(Q, P)$ tel que $\varphi(Q) \subset R$ et $\tilde{\varphi} \in F_A(Q_\delta, P_\gamma)$ il existe $\epsilon \in \mathcal{P}_A(R)$ tel que $R_\epsilon \subset P_\gamma$ et $\tilde{\varphi} \in F_A(Q_\delta, R_\epsilon)$.*

En effet, en posant $Q' = \varphi(Q)$, on sait qu'il existe $\delta' \in \mathcal{P}_A(Q')$ tel que $Q'_{\delta'} \subset P_\gamma$ et $\tilde{\varphi} \in F_A(Q_\delta, Q'_{\delta'})$ (cf. [3], 2.11) et il suffit de choisir $\epsilon \in \mathcal{P}_A(R)$ tel que l'on ait $Q_{\delta'} \subset R_\epsilon \subset P_\gamma$. Enfin, lorsque $A = \mathcal{O}G$ et Q_δ est local, on sait que (cf. [3], théorème 3.1)

$$2.6.3. \quad E_G(Q_\delta, P_\gamma) = F_A(Q_\delta, P_\gamma) .$$

2.7. D'autre part, si A' est une autre G -algèbre intérieure et $\tilde{f} : A \rightarrow A'$ un exomorphisme