Astérisque

LAURENT MORET-BAILLY

Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques

Astérisque, tome 183 (1990), p. 37-58
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183__37_0>

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Société Mathématique de France
Astérisque 183 (1990)

Hauteurs et classes de Chern sur les surfaces arithmétiques

Laurent Moret-Bailly

0. Introduction.

On présente dans cet exposé les idées de Parshin [P] sur le thème : "un analogue arithmétique de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka $c_1^2 \leq 3\, c_2$ pour les surfaces complexes impliquerait, entre autres, la conjecture de Szpiro sur le discriminant des courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$".

Après le rappel de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka au § 1, puis des généralités sur les familles de courbes au § 2, notamment sur la "mesure de la mauvaise réduction", on énonce au § 3 l'"hypothèse BM", qui est un analogue arithmétique de Bogomolov-Miyaoka, assez affaibli par rapport à [P] ; on montre ensuite que BM équivaut à une variante de la "conjecture des petits points" de Szpiro.

Au § 4 on introduit l'hypothèse ME ("Mordell effectif") qui est une majoration de la hauteur d'un point d'une courbe de genre ≥2 sur un corps de nombres, en termes du corps de rationalité de ce point : à degré (sur $\mathbb{Q}$) fixé, la borne est *linéaire* par rapport au logarithme du discriminant. Pour plus de commodité, on étend cette hypothèse à des variétés (propres) arbitraires munies d'une hauteur quelconque, de sorte qu'elle est évidemment fausse avec cette généralité ; toutefois, on montre au § 5 que BM implique une telle généralisation de ME, valable pour des variétés qui paramètrent une famille de courbes lisses de genre ≥2. La "construction de Kodaira" montre que les courbes de genre ≥2 tombent elles-mêmes sous le coup de cet énoncé.

Le § 6 est consacré à la conjecture du discriminant de Szpiro pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$; on montre que celle-ci est conséquence de ME appliquée à une courbe modulaire. De même, au § 7, on déduit de ME une version de la "conjecture *abc*", en appliquant ME à un revêtement ramifié convenable de $\mathbb{P}^1$. Enfin, on fait au § 8 quelques commentaires sur l'effectivité des méthodes et des résultats.

1. Inégalité de Bogomolov-Miyaoka.

1.1. Soit X une surface projective irréductible lisse complexe de type général. On a alors l'inégalité ([M], [Y])

$$c_1^2(X) \leq 3\, c_2(X) \tag{1.1.1}$$

entre les classes de Chern de X ; des inégalités plus faibles avaient été obtenues auparavant par Bogomolov ([B], avec 4 au lieu de 3) et Van de Ven ([V], avec 8).

1.2. On énoncera au § 3 un analogue de (1.1.1) pour les "surfaces arithmétiques". Celles-ci sont des courbes sur des anneaux d'entiers algébriques, il faut donc d'abord reformuler (1.1.1) en termes de fibrations en courbes. Soit $f: X \to B$ un morphisme surjectif de la surface X sur une courbe B lisse de genre q. On suppose que f fait de X une B-courbe semi-stable (voir les rappels au § 2) ; la fibre générique est alors de genre $g \geq 2$ puisque X est de type général.

La première classe de Chern $c_1(X)$ est la classe dans Pic(X) du faisceau dualisant

$$\omega_X = \omega_{X/B} \otimes f^* \omega_B \tag{1.2.1}$$

de sorte que

$$c_1^2(X) = (\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) + 2(2g-2)(2q-2). \tag{1.2.2}$$

On sait par ailleurs que

$$c_2(X) = \sum_{b \in B} \delta_b(X) \;+\; (2g-2)(2q-2) \tag{1.2.3}$$

où $\delta_b(X)$ désigne le nombre de points singuliers de la fibre $f^{-1}(b) = X_b$. Il en résulte que l'avatar relatif de (1.1.1) est

$$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \leq \;(2g-2)(2q-2) + 3 \sum_{b \in B} \delta_b(X). \tag{1.2.4}$$

Plus généralement, $c_1^2(X) \leq \lambda\, c_2(X)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ équivaut à

$$(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B}) \leq \lambda \sum_{b \in B} \delta_b(X) + (\lambda-2)(2g-2)(2q-2). \tag{1.2.5}$$

1.3. Le lecteur pourra consulter [P] pour des variantes de ces inégalités, notamment sans hypothèse sur le genre des fibres ou celui de B. Mentionnons celle-ci : l'inégalité (1.2.4) reste vraie si l'on remplace X par son *modèle stable* X_0 sur B ; ceci ne change pas le membre de gauche et diminue les δ_b . En fait on a, pour tout $b \in B$, $\delta_b(X_0) \leq 3g-3$, de sorte que l'on obtient une majoration de $(\omega_{X/B} \cdot \omega_{X/B})$ uniquement en termes des genres et du nombre de fibres singulières.

2. Familles de courbes à singularités ordinaires.

2.1. Soit B un schéma. On appelle *B-courbe nodale* un morphisme $f : X \to B$ propre, surjectif et plat, dont les fibres géométriques sont des courbes n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires. Le $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\Omega_{X/B}$ des différentielles relatives de f admet alors une stratification de Fitting du type

$$\mathrm{Sing}(X/B) \subset X$$

où $\mathrm{Sing}(X/B)$ est le plus grand sous-schéma fermé Y de X tel que $\Omega_{X/B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Y$ soit localement libre de rang 2 sur Y.

2.2. *Description locale.* Avec les notations de 2.1, si $B = \mathrm{Spec}\, R$ où R est local complet de corps résiduel k, et si $x \in X$ est un point singulier k-rationnel de la fibre fermée de f, le complété $A = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ de $\mathcal{O}_{X,x}$ est R-isomorphe à $R[[u,v]]/(uv-t)$ où $t \in R$, d'où une présentation

$$A \xrightarrow{\binom{v}{u}} A \times A \xrightarrow{(du,dv)} \Omega_{X/B} \otimes_{\mathcal{O}_X} A \longrightarrow 0$$

qui montre que $\mathrm{Sing}(X/B) \times_X \mathrm{Spec}\, A$ est défini par l'idéal (u,v) donc isomorphe comme R-schéma à $\mathrm{Spec}(R/tR)$.

2.3. On déduit de 2.2 que $\mathrm{Sing}(X/B)$ (dont la formation, par construction, commute à tout changement de base) est *fini et non ramifié* sur B ; si l'on pose

$$\Sigma(X/B) = f_* \, \mathcal{O}_{\mathrm{Sing}(X/B)} \tag{2.3.1}$$

alors $\Sigma(X/B)$ est un $\mathcal{O}_B$-module cohérent, isomorphe localement pour la topologie étale sur B à $\bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_B/t_i\mathcal{O}_B$ pour $s \in \mathbb{N}$ et $t_i \in \mathcal{O}_B$ convenables. En particulier on a pour tout $b \in B$

$$\mathrm{rg}_b\, \Sigma(X/B) = \delta_b(X) \tag{2.3.2}$$

où, par définition $\mathrm{rg}_b\,\Sigma(X/B) = \dim_{\kappa(b)}(\Sigma(X/B)\otimes_{\mathcal{O}_B}\kappa(b))$, et où $\delta_b(X)$ désigne le nombre géométrique sur $\kappa(b)$ de points singuliers de la fibre X_b.

Enfin, comme $\mathrm{Sing}(X/B)$ est fini sur B, la formation de $\Sigma(X/B)$ commute à tout changement de base.

Proposition 2.4. *Soit $f : X \to B$ une B-courbe nodale. On suppose que $B = \mathrm{Spec}\,\Lambda$ est un trait de point fermé b et de point générique η, et que $f_\eta : X_\eta \to \eta$ est lisse, de sorte que $\Sigma(X/B)$ est un Λ-module de longueur finie.*

Soit $p : X' \to X$ une résolution minimale des singularités de X. Alors la longueur du Λ-module $\Sigma(X/B)$ est égale au nombre géométrique $\delta_b(X')$ de points singuliers de X'_b.

Preuve. On obtient X' à partir de X en éclatant le sous-schéma *réduit* $\mathrm{Sing}\,X$ formé des points singuliers de X, et en répétant le processus jusqu'à obtenir un schéma régulier. Or il résulte de la non-ramification de $\mathrm{Sing}(X/B)$ (qui contient $\mathrm{Sing}\,X$) que les corps résiduels des points de $\mathrm{Sing}X$ sont des extensions séparables de $\kappa(b)$, de sorte que la formation du sous-schéma $\mathrm{Sing}\,X$ commute au changement de base $\Lambda \to \Lambda'$ où Λ' est un anneau de valuation discrète complet, non ramifié sur Λ et de corps résiduel une clôture algébrique de $\kappa(b)$. On peut donc supposer Λ complet à corps résiduel algébriquement clos (on rappelle que l'éclatement commute au changement de base plat).

Soient $x_1,\dots,x_s$ les points singuliers de X_b : on a pour $1 \le i \le s$

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i} \simeq \Lambda[[x,y]]\,/\,(xy-t_i)$$

avec $t_i = \pi^{e_i}$ où π est une uniformisante de Λ, et dans ces conditions

$$\Sigma(X/B) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda\,/\,t_i\,\Lambda$$

de sorte que la longueur de $\Sigma(X/B)$ est la somme des e_i. L'assertion de la proposition est donc claire si X est régulier : dans ce cas les e_i sont égaux à 1, et $s = \delta_b(X) = \delta_b(X')$. Il suffit donc de voir que la somme des e_i ne change pas par éclatement d'un point singulier (i.e. d'un point x_i tel que $e_i \ge 2$). Le calcul est fait notamment dans [SPC], I, proposition 2.2 : si $e_i \ge 2$ et si $p_i : X_i \to X$ est l'éclaté de x_i dans X, alors $(X_i)_b$ contient, au-dessus de x_i, deux points doubles réguliers dans X_i, et de plus, si $e_i \ge 2$, un point double du type $\Lambda[[x,y]]\,/\,(xy-\pi^{e_i-2})$. ■

2.5. On suppose maintenant que B est un schéma régulier de dimension 1, et que