

Astérisque

RENÉE ELKIK

Le théorème de Manin-Drinfeld

Astérisque, tome 183 (1990), p. 59-67

[<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183_59_0>](http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__183_59_0)

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le Théorème de Manin–Drinfeld

R. ELKIK

Si N est un entier positif on désigne par $\Gamma(N)$ le sous-groupe de $SL(2, \mathbb{Z})$ formé des matrices congrues à l'identité modulo N . Un sous-groupe Γ de $SL(2, \mathbb{Z})$ est appelé sous-groupe de congruence s'il existe N tel que $\Gamma \supset \Gamma(N)$. On désigne alors par X_1^0 (resp. X_Γ) la surface de Riemann quotient du demi-plan de Poincaré par Γ (resp. sa complétion projective lisse). On appelle "pointes" les points de $X_\Gamma - X_\Gamma^0$. Le théorème de Manin–Drinfeld s'énonce ainsi :

THÉORÈME. *Si Γ est un sous-groupe de congruence, la classe de tout diviseur de degré 0 de X_Γ à support dans les pointes, est un élément de torsion de $\text{Pic}^0(X_\Gamma)$.*

La démonstration originelle de ce théorème est due à Manin [Ma] complétée par Drinfeld [Dr].

Dans le cas du groupe $\Gamma_0(p)$, p premier, la courbe modulaire correspondante n'a que deux pointes P_0 et P_∞ . Si l'on pose

$$\Delta(2) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \text{ où } q = e^{2i\pi\tau}$$

et $\Delta_p(\tau) = \Delta(p\tau)$ le quotient Δ/Δ_p définit une fonction rationnelle sur $X_{\Gamma_0(p)}$ dont le diviseur est $(p-1)(P_0 - P_\infty)$. On peut montrer que pour $p > 3$ la classe de $(P_0 - P_\infty)$ est d'ordre exactement $\frac{p-1}{d}$, où $d = \frac{12}{(p-1, 12)}$.

[pour plus de détails voir Ogg [0]].

Nous avons choisi d'exposer en détail la démonstration proposée par Deligne [De 1]. Le principe est le suivant :

a) Le théorème de Manin–Drinfeld est équivalent à l'énoncé suivant :
La structure de Hodge–mixte sur $H^1(X_{\Gamma}^0, \mathbb{Q})$ est scindée.

La démonstration de cette équivalence est l'objet du §1.

b) Il suffit d'établir le théorème pour les groupes $\Gamma(N)$: c'est clair.

c) L'entier N étant fixé on considère une correspondance de Hecke sur la courbe $X_{\Gamma(N)}$ qui définit un endomorphisme de $H^1(X_{\Gamma(N)}^0, \mathbb{Z})$ muni de sa structure de Hodge mixte. L'ensemble des valeurs propres de cet opérateur agissant sur la composante de poids 1, c'est-à-dire essentiellement sur les formes modulaires cuspidales est disjoint de l'ensemble des valeurs propres pour l'action sur la partie de poids 2, qui correspond aux formes non cuspidales. Ceci permet de scinder la structure de Hodge sur $\mathbb{Q}$.

I – THÉORÈME.

Soient X une courbe projective lisse sur $\mathbb{C}$, S un ensemble fini de points de X et $j: X^0 = X - S \hookrightarrow X$ l'inclusion du complémentaire de S dans X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) *la classe de tout diviseur de degré 0 à support dans S est un élément de torsion de $\text{Pic}^0(X)$.*
- b) *La structure de Hodge mixte sur $H^1(X^0, \mathbb{Q})$ est scindée (i.e. somme directe de structures pures).*

Cet énoncé résulte aisément de [De 3 §10–3] auquel réfère [De 1]. Le principe de la démonstration est alors le suivant : on considère le 1–motif formé de :

- la variété abélienne $\text{Pic}^0(X)$
- le groupe D_S^0 des diviseurs de degré 0 sur X portés par S
- l'homomorphisme classe de D_S^0 dans $\text{Pic}^0(X)$.

Il est clair sur sa définition que le H^1 de Hodge mixte de ce motif se scinde sur $\mathbb{Q}$ ssi la condition a) est remplie. On montre que ce H^1 motivique et $H^1(X^0, \mathbb{Z})$ sont isomorphes (comme structure de Hodge) à torsion par $\mathbb{Z}(1)$ près.

Lors de l'exposé oral nous avons suivi [De 3]. Nous donnons ici une démonstration un peu différente.

Rappelons d'abord la description de $H^1(X^0, \mathbb{Z})$. Si $\varphi: A \rightarrow B$ est un homomorphisme de faisceaux abéliens sur un espace topologique on note $[A \xrightarrow{\varphi} B]$ le complexe dont les seuls termes non nuls sont A en degré 0, B en degré 1 et qui a φ pour différentielle.

On a les isomorphismes suivants [De 2] :

$$\begin{aligned}
 H^1(X^0, \mathbb{C}) &\xrightarrow{\sim} H^1(X^0, [0_{X^0} \xrightarrow{d} \Omega_{X^0}^1]) \\
 &\xleftarrow{\sim} H^1(X, [j_{*} 0_{X^0} \xrightarrow{d} j_{*} \Omega_{X^0}^1]) \\
 &\xleftarrow{\sim} H^1(X, 0_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \langle S \rangle)
 \end{aligned}$$

où $\Omega_X^1 \langle S \rangle$ désigne le faisceau des formes différentielles méromorphes sur X , holomorphes en restriction à X^0 et admettant des pôles d'ordre ≤ 1 , aux points de S . La filtration par le poids sur $H^1(X^0, \mathbb{Z})$ est définie par : $W_{0, \mathbb{Z}} = 0$, $W_{1, \mathbb{Z}} = j^* H^1(X, \mathbb{Z}) (= H^1(X, \mathbb{Z}))$, $W_{2, \mathbb{Z}} = H^1(X^0, \mathbb{Z})$.

Si A désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$ on note $W_{i, A}$, le sous-module $W_{i, \mathbb{Z}} \otimes A$ de $H^1(X^0, A)$. On a $W_{1, \mathbb{C}} = \text{Im}(H^1(X, O_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1) \longrightarrow H^1(X, O_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \langle S \rangle))$.

Si s est un point de X on note $\mathbb{C}_s$ le faisceau sur X de fibre $\mathbb{C}$ en s et nul ailleurs. On a alors une suite exacte :

$$\begin{aligned}
 (\Sigma) \quad 0 &\longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \langle S \rangle \xrightarrow{r} \bigoplus_{s \in \mathbb{C}} \mathbb{C}_s \longrightarrow 0 \\
 w &\longrightarrow r(w) = \bigoplus 2i\pi \text{res}_s(w).
 \end{aligned}$$

Notons encore $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}_s$, l'espace des sections globales de ce faisceau et $\mathcal{U}$ le noyau de la forme linéaire sur $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{C}_s : \bigoplus_s a_s \longrightarrow \sum_s a_s$. L'ensemble des points entiers de $\mathcal{U}$ s'identifie naturellement au groupe $D_S^0 : \sum_s n_s \cdot s \longrightarrow \bigoplus_s n_s$.

On vérifie aisément qu'on a le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^1(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(X^0, \mathbb{C}) & \longrightarrow & Gr_2^W(H^1(X^0, \mathbb{C})) \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \varphi & & \varphi_2 \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_X^1) & \longrightarrow & H^0(X, \Omega_X^1 \langle S \rangle) & \longrightarrow & U \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

La 1ère (resp. 2ème) ligne est déduite de la suite de cohomologie associée à l'inclusion $[O_X \longrightarrow \Omega_X^1] \longrightarrow [O_X \longrightarrow \Omega_X^1 \langle S \rangle]$ (resp. à Σ). Les flèches verticales sont induites par l'inclusion $\Omega_X^1 \langle S \rangle [-1] \longrightarrow [O_X \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \langle S \rangle]$. En outre la flèche r a été définie de sorte que φ_2 soit compatible aux structures entières et identifie donc $Gr_2^W(H^1(X^0, \mathbb{Z}))$ à D_S^0 .

La filtration de Hodge sur $H^1(X^0, \mathbb{C})$ est définie par $F^0 = H^1(X^0, \mathbb{C})$, $F^1 = \text{Im } \varphi$, $F^2 = 0$. Comme l'application $F^1 \longrightarrow Gr_2^W$ est surjective celui-ci est muni d'une structure pure

de type $(1,1)$. En outre $\text{Gr}_1^w = H^1(X, \mathbb{C})$ est muni de sa structure pure "usuelle" de type $((0,1)(1,0))$.

Une structure de Hodge mixte, extension de 2 structures pures de poids consécutifs est toujours scindée sur $\mathbb{R}$ [G,S]. Et il est facile d'exhiber ici le scindage de cette structure sur $\mathbb{R}$: en effet $F_1^{-1} \cap F^1$ est un supplémentaire de $H^1(X, \mathbb{C})$ dans $H^1(X^0, \mathbb{C})$. Le supplémentaire cherché de $H^1(X, \mathbb{R})$ dans $H^1(X^0, \mathbb{R})$ est donc $F_1^{-1} \cap H^1(X^0, \mathbb{R})$.

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant :

LEMME. *Pour qu'une forme $w \in H^0(X, \Omega_X^1 \langle S \rangle)$ définisse une classe de cohomologie entière de X^0 il faut et il suffit qu'il existe une fonction méromorphe f sur X (automatiquement holomorphe non nulle sur X^0) telle que $w = \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f}$.*

La condition est clairement suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. Soient $\pi : \tilde{X}^0 \rightarrow X^0$ le revêtement universel de X^0 et Γ son groupe d'automorphismes. Il existe une fonction holomorphe h sur $\tilde{X}^0$ telle que $\pi^*w = dh$. L'hypothèse faite sur w signifie que pour tout γ dans Γ , on a $h \circ \gamma - h \in \mathbb{Z}$. Il existe donc une fonction holomorphe f sur X^0 telle que $f \circ \pi = e^{2\pi i h}$, et l'on a sur X^0 $\frac{df}{f} = 2\pi i w$. La méromorphie de f sur X résulte de l'hypothèse $w \in H^0(X, \Omega_X^1 \langle S \rangle)$.

Considérons donc $w = \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f} \in H^0(X, \Omega_X^1 \langle S \rangle)$.

On a alors $\sum \text{res}_s(w) s = \text{Div}(f)$.

Le lemme signifie donc que pour qu'un élément de D_S^0 se relève dans $F^1 \cap H^0(X^0, \mathbb{Z})$, il faut et il suffit qu'il soit principal, ce qui est un énoncé légèrement plus précis que celui du théorème.

II – ACTION DES CORRESPONDANCES SUR LA COHOMOLOGIE.

Considérons un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y^0 & \hookrightarrow & Y \\ p^0 \downarrow & & \downarrow p \\ X^0 & \hookrightarrow & X \end{array}$$

dans lequel p^0 est un morphisme fini de courbes lisses sur $\mathbb{C}$, étendu en p entre leurs complétions projectives lisses. On désigne par S (resp. $\tilde{S}$) l'ensemble des points de $X - X^0$ (resp. $Y - Y^0$).