MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

Homologie de Hochschild et homologie cyclique des algèbres différentielles graduées

Astérisque, tome 191 (1990), p. 255-267
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__191__255_0>

HOMOLOGIE DE HOCHSCHILD ET HOMOLOGIE CYCLIQUE DES ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES

Micheline Vigué-Poirrier *

La notion d'homologie de Hochschild pour une algèbre associative A sur un anneau commutatif unitaire k est bien connue, [Mc]. Elle est notée $HH_*(A)$ et définie par $HH_*(A) = \mathrm{Tor}^{A\otimes A^{op}}(A, A)$ où A^{op} est l'algèbre opposée de A .

Cette notion a été étendue à la catégorie des algèbres associatives différentielles graduées sur un anneau commutatif k (notée k-ADG) par plusieurs auteurs, [B1],[G].

La notion d'homologie cyclique, notée $HC_*(\cdot)$, est apparue plus récemment ; on trouvera un exposé complet dans [LQ] pour le cas des algèbres ; et pour la catégorie k-ADG dans [B1] ou [G].

Ce papier contient une généralisation à la catégorie k-ADG (où k est un corps quelconque) du résultat de Loday-Quillen du calcul explicite de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique pour une algèbre tensorielle. Nous fournissons un algorithme de calcul précis de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique pour une algèbre différentielle graduée libre. Le résultat général s'énonce ainsi :

Théorèmes 1.5 et 2.4 *Soit $(A,d) = (T(V),d)$ une algèbre différentielle graduée libre sur un corps commutatif k . Alors, on a des isomorphismes d'espaces vectoriels gradués :*

(1) $HH_*(A,d) = H_*(A \oplus (A\otimes \bar{V}), \delta)$ où $\bar{V}_n = V_{n-1}$, $\delta_{|A} = d$, $\delta(a\otimes \bar{v}) = da \otimes \bar{v} - S(a, dv) + (-1)^{|a|+|\bar{v}|}(av - (-1)^{|a|\cdot|v|}va)$ et S est l'application k-linéaire :

$$S(a, v_1 \cdots v_p) = (-1)^{|a|} \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\varepsilon_i} v_{i+1} \cdots v_p a v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i$$
$$+ (-1)^{|a|} a v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p \ .$$

(2) $HC_*(A,d) = H_*(k[u] \otimes (A \oplus A\otimes \bar{V}), D)$ où $|u| = 2$, $D = 0$ sur $k[u]$, $D = \delta$ sur $A \oplus \big(k[u] \otimes (A\otimes \bar{V})\big)$ et

$$D(u^n \otimes v_1 \cdots v_p) = u^n \otimes d(v_1 \cdots v_p) + u^{n-1} \otimes [v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p$$
$$+ \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\mu_i} v_{i+1} \cdots v_p v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i]$$

si $n \geq 1, p \geq 1$.

La motivation d'un tel travail est double : d'une part, il est facile de montrer que si (A,d) est une ADG quelconque, alors il existe une ADG libre $(T(V),d)$ et un morphisme $\rho : (T(V),d) \to$

* **URA au CNRS D 0751**

(A, d) qui induit un isomorphisme en homologie, et, par un résultat classique, [B1], les ADG (A, d) et $(T(V), d)$ ont des homologies de Hochschild et cycliques isomorphes ; le calcul, dans le cas général, se ramène donc, au calcul pour les ADG libres. D'autre part, en topologie algébrique, le calcul de l'homologie (resp. l'homologie équivariante)de l'espace des lacets libres sur un espace donné X se ramène à un calcul d'homologie de Hochschild (resp. cyclique) d'invariants topologiques liés à X, [BF],[G], [J]. Enfin, la théorie de Morse permet de montrer des résultats concernant la géométrie d'une variété riemannienne à partir uniquement de l'étude de la cohomologie de l'espace des lacets libres sur cette variété. Ceci explique notre recherche d'un "modèle" permettant de calculer l'homologie de l'espace des lacets libres sur un corps k quelconque. En caractéristique 0 , le problème a été complètement résolu dans [SV], en travaillant dans la catégorie des algèbres commutatives différentielles graduées. En caractéristique p non nulle, il est possible, dans certains cas, de travailler encore dans la catégorie des algèbres commutatives graduées, [HV].

Le plan de l'article est le suivant : Dans le § .1, nous donnons quelques rappels d'algèbre différentielle homologique, et nous définissons un complexe dont l'homologie calcule l'homologie de Hochschild. Dans le § .2, nous définissons sur le complexe précédent un opérateur β de degré $+1$; le complexe mixte ainsi obtenu permet de calculer l'homologie cyclique, cf. [K]. Dans le § .3, nous donnons une méthode de calcul de l'homologie (resp. de l'homologie équivariante) de l'espace des lacets libres sur un espace X , à valeurs dans un corps commutatif k , à partir de la donnée de l'algèbre $C_*(\Omega X, k)$ des chaînes sur l'espace des lacets ΩX ou de l'algèbre des cochaînes $C^*(X, k)$. Si X est un espace simplement connexe de L-S catégorie 1 , alors on a une formule explicite pour l'homologie (resp. l'homologie équivariante) de l'espace des lacets libres sur X . Elles coïncident avec celles données par Hsiang et Staffeldt [HS], et Burghelea [B1] pour X une suspension et k un corps de caractéristique 0. Cette formule figure aussi dans [CC]. Pour les sphères, un calcul analogue se trouve dans [H]. Notre modèle permet de calculer explicitement l'homologie de l'espace des lacets libres sur $X = \mathbf{C}P^2$.

Un problème reste ouvert. Peut-on montrer, en utilisant le modèle du § .3, la célèbre conjecture :

Conjecture : Soit X un espace simplement connexe tel que $H^*(X, k)$ soit de dimension finie (k corps quelconque).

Alors, la suite des nombres de Betti de l'homologie de l'espace des lacets libres à valeurs dans k n'est pas bornée si et seulement si $H^*(X, k)$ ne peut pas être engendrée par un seul élément en tant qu'algèbre commutative graduée.

Cette conjecture a été complètement résolue en caractéristique 0 , [SV]. En caractéristique $p \neq 0$, elle a été résolue dans certains cas, voir [HV].

§.1. Homologie de Hochschild d'une algèbre différentielle graduée libre

Les définitions de base en algèbre homologique différentielle se trouvent, par exemple, dans [HMS],[FHT1].

Tous les espaces vectoriels sont définis sur un corps commutatif k et sont $\mathbf{Z}$-gradués, avec la convention que $M^n = M_{-n}$ si $\oplus_n M^n$ est un k-espace vectoriel gradué. La valeur absolue du degré d'un élément x est notée $|x|$.

On dit que (A,d) est une k-algèbre différentielle graduée (en abrégé ADG), si $A = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} A_n$ est un k-espace vectoriel gradué, muni d'une structure d'algèbre associative unitaire sur k telle que $A_n \cdot A_m \subset A_{n+m}$. De plus, d est une dérivation de k-algèbre de degré ± 1 vérifiant $d^2 = 0$. Dans la suite, on considérera uniquement, ou bien des algèbres différentielles graduées A_* avec $A_n = 0$ pour $n < 0$ et d de degré -1 , ou bien des algèbres différentielles graduées A^* avec $A^n = 0$ pour $n < 0$ et d de degré $+1$. Une ADG de ce dernier type sera étudiée comme une ADG (A_{-*}, d_{-*}) uniquement graduée en degrés négatifs et munie d'une différentielle de degré -1 . Si $V = \oplus_{n\in\mathbf{Z}} V_n$ est un k-espace vectoriel gradué, on note $T(V)$ l'algèbre associative libre construite sur V . Si (A,d) est une ADG, on définit l'ADG (A^{op}, d^{op}) par $A^{op} \simeq A$, $a^{op} \cdot b^{op} = (-1)^{|a|\cdot|b|}(ba)^{op}, d^{op}(a^{op}) = (da)^{op}$.

L'application $F_g : (A \otimes A^{op}) \otimes A \to A$ définie par $F_g(\alpha \otimes \beta^{op}, \gamma) = (-1)^{|\beta|\cdot|\gamma|}\alpha\gamma\beta$ munit A d'une structure de $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué à gauche.

L'application $F_d : A \otimes (A \otimes A^{op}) \to A$ définie par $F_d(\gamma, \alpha \otimes \beta^{op}) = (-1)^{|\beta|(|\alpha|+|\gamma|)}\beta\gamma\alpha$ munit A d'une structure de $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué à droite.

Définition 1.1 [B1],[G]. *Soit (A_*, d_*) une algèbre différentielle graduée telle que, ou bien $A_n = 0$ pour tout $n < 0$, ou bien $A_n = 0$ pour tout $n > 0$ et $A_o = k$, alors on définit l'homologie de Hochschild de (A_*, d_*) , notée $HH_*(A_*, d_*)$ par $HH_*(A_*, d_*) = \mathrm{Tor}^{A\otimes A^{op}}(A, A)$.*

Définition 1.1.' *Soit (A^*, d^*) une algèbre différentielle graduée telle que $A^o = k$, $A^* = \oplus_{n\geq 0} A^n$, et d^* de degré $+1$, on définit l'homologie de Hochschild $HH^*(A^*, d^*)$ par*

$$HH^*(A^*, d^*) = HH_{-*}(A_{-*}, d_{-*}) .$$

La définition du foncteur Tor dans la catégorie différentielle se trouve, par exemple, dans [FHT1] et ne sera pas rappelée.

Si (A,d) est une algèbre différentielle graduée vérifiant les hypothèses de la définition 1.1, on a alors $HH_*(A,d) = H_*(A \otimes_{A\otimes A^{op}} P)$ où $P \to A$ est une résolution quelconque semi-libre de A par des $(A \otimes A^{op})$-modules différentiels gradués à gauche. Rappelons que si R est une algèbre différentielle graduée, un R-module est dit libre si c'est un $R_\#$-module libre sur une base de cycles (où $R_\#$ est l'algèbre graduée sous-jacente à R), et un R-module P est dit semi-libre s'il est une réunion croissante de sous-modules $0 = P_{-1} \subset P_0 \subset \cdots$ tel que chaque P_i/P_{i-1} soit libre.

Dans le cas particulier où $A = T(V)$, avec V gradué en degré 0 et $d = 0$, rappelons le résultat de Loday-Quillen (lemme 5.1), on a une suite exacte de $(A \otimes A^{op})$-modules : $0 \to A \otimes V \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$ où $m(a \otimes a') = aa'$, $b'(a \otimes v \otimes a') = av \otimes a' - a \otimes va'$, ce qui leur permet de calculer facilement l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique de $T(V)$.

Nous supposons maintenant que $(A, d) = (T(V), d)$ est une ADG libre vérifiant les hypothèses de la définition 1.1. Nous utilisons une version graduée de la résolution de [L-Q] pour construire une résolution semi-libre de A par des $(A \otimes A^{op})$-modules différentiels gradués.

Il est immédiat de vérifier que, si $W = \oplus_n W_n$ est un k-espace vectoriel gradué, alors $A \otimes W \otimes A$ est un $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué à gauche, si on pose $(\alpha \otimes \beta^{op}) \cdot (a \otimes w \otimes a') = (-1)^{|\beta| \cdot [|a|+|w|+|a'|]} \alpha a \otimes w \otimes a' \beta$, pour $\alpha, \beta, a, a' \in A, w \in W$. On a : $a \otimes w \otimes a' = (-1)^{|a'| \cdot |w|}(a \otimes a'^{op}) \cdot (1 \otimes w \otimes 1)$.

Soit $A = T(V)$ une algèbre tensorielle graduée, posons $\bar{V} = \oplus \bar{V}_n$ où $\bar{V}_n = V_{n-1}$. On définit $m : A \otimes A \to A$ par $m(a \otimes a') = aa'$, $\varepsilon : A \to A \otimes A$ par $\varepsilon(a) = a \otimes 1$, $\tilde{b}' : A \otimes \bar{V} \otimes A \to A \otimes A$ par $\tilde{b}'(a \otimes \bar{v} \otimes a') = (-1)^{|a'|}(av \otimes a' - a \otimes va')$ et $s : A \otimes A \to A \otimes \bar{V} \otimes A$ par $s(\alpha \otimes v_1 \cdots v_p) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{1+\sum_{k=i+1}^{p} |v_k|} \alpha v_1 \cdots v_{i-1} \otimes \bar{v}_i \otimes v_{i+1} \cdots v_p - \alpha v_1 \cdots v_{p-1} \otimes \bar{v}_p \otimes 1$, si $\alpha \in A$, $v_1 \cdots v_p \in T^p(V)$, et $s = 0$ sur $A \otimes k$.

Lemme 1.2 *Soit le diagramme suivant :* $A \otimes \bar{V} \otimes A \underset{s}{\overset{\tilde{b}'}{\rightleftarrows}} A \otimes A \underset{\varepsilon}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A$ *où* $\tilde{b}', s, m, \varepsilon$ *ont été définis ci-dessus. Alors*

1) $m\varepsilon = \mathrm{Id}_A$, $\tilde{b}'s + \varepsilon m = \mathrm{Id}_{A \otimes A}$, $s\tilde{b}' = \mathrm{Id}_{A \otimes \bar{V} \otimes A}$

2) La suite $0 \to A \otimes \bar{V} \otimes A \xrightarrow{\tilde{b}'} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$ *est une résolution de* A *par des* $(A \otimes A^{op})$*-modules gradués.*

■ Il est facile de vérifier que $\tilde{b}', m, \varepsilon, s$ sont des morphismes de $(A \otimes A^{op})$-modules gradués. De plus, 1) se montre immédiatement et prouve que (ε, s) est une homotopie entre Id et 0 , ce qui donne 2). ■

Soit maintenant $(A, d) = (T(V), d)$ une ADG libre; nous allons définir une différentielle d_1 sur $A \otimes \bar{V} \otimes A$ qui fasse de $(A \otimes \bar{V} \otimes A, d_1)$ un $(A \otimes A^{op})$-module différentiel gradué et qui fasse de $\tilde{b}'$ un morphisme de modules différentiels gradués.

Si $a, a' \in A, \bar{v} \in \bar{V}$, on a : $a \otimes \bar{v} \otimes a' = (-1)^{|a'| \cdot |\bar{v}|}(a \otimes a'^{op}) \cdot (1 \otimes \bar{v} \otimes 1)$. Il suffit donc de définir $d_1(1 \otimes \bar{v} \otimes 1)$ et de l'étendre par :

$$(-1)^{|a'| \cdot |\bar{v}|} d_1(a \otimes \bar{v} \otimes a') = d(a \otimes a'^{op}) \cdot (1 \otimes \bar{v} \otimes 1) + (-1)^{|a|+|a'|}(a \otimes a'^{op}) \cdot d_1(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) .$$

On a $d\tilde{b}'(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = d(v \otimes 1 - 1 \otimes v) = dv \otimes 1 - 1 \otimes dv$, mais $1 \otimes \bar{v} \otimes 1 = -s(1 \otimes v)$, donc $d\tilde{b}'(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = -d\tilde{b}'s(1 \otimes v)$. D'après le lemme 1.2, $d\tilde{b}'(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = -d(1 \otimes v) + d\varepsilon m(1 \otimes v) =$