

Astérisque

FELICE RONGA

Recherche de solutions d'inéquations polynomiales

Astérisque, tome 192 (1990), p. 11-16

http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__192__11_0

© Société mathématique de France, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Recherche de solutions d'inéquations polynomiales

FELICE RONGA

Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme à coefficients entiers de degré d , R un entier positif et soit $\Omega_R^+(P) = \{x \in \mathbb{R}^n | P(x) > 0, \|x\| \leq R\}$, où sur \mathbb{R}^n l'on prend la norme $\|x\| = \sup\{|x_i|, i = 1 \dots n\}$. Si $P(X) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha X^\alpha$, supposons que $|a_\alpha| \leq H$, $\alpha \in S$ et que $\#S \leq N$. Nous allons montrer que toute solution de l'inéquation $P(x) > 0$ avec $\|x\| \leq R$ est dans la même composante qu'une solution qui appartient au sommets du maillage obtenu en partageant les cotés du cube $\{x | \|x\| < R\}$ en T parties, où T est un entier qui dépend de n, d, N , et H et qui sera donné explicitement (voir le corollaire du théorème I).

J'aimerais remercier le referee inconnu qui a relevé que les résultats de ce travail ne sont valables que si l'on travaille avec des polynômes à coefficients entiers, alors que dans des versions intermédiaires une partie des résultats étaient énoncés pour des polynômes à coefficients réels.

REMARQUES

1. Le cas de plusieurs inéquations se ramène à celui d'une seule. En effet, si $P_1(X), \dots, P_k(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ les composantes connexes de l'ensemble

$$\Omega_R^+(P_1, \dots, P_k) = \{x \in \mathbb{R}^n | P_i(x) > 0, i = 1 \dots k, \|x\| \leq R\}$$

sont parmi les composantes connexes de $\Omega_R^+(P)$, où $P = P_1 \cdot \dots \cdot P_k$. Il suffit donc d'écarter, parmi les solutions de $P(x) > 0$, celles pour lesquelles il existe i avec $P_i(x) < 0$.

2. Le théorème II nous dit que toute solution dans \mathbb{R}^n tout entier de l'inéquation $P(x) > 0$ est dans la même composante connexe de $\{x | P(x) > 0\}$ qu'une solution se trouvant dans le cube centré à l'origine de demi-côté R , où $R = R(n, d, N, H)$ est donné explicitement.

3. Ainsi que le referee me l'a fait remarquer, des résultats analogues, bien que moins explicites, ont été obtenus dans [1].

Le lemme suivant est bien connu (voir A.L. Cauchy, Œuvres Complètes, Série II, tome IX, De Bure Frères, Paris, (1829), page 122):

LEMME 1. Soit $P(Y) = \sum_{i=0}^d a_i Y^i$, $a_i \in \mathbf{R}$ un polynôme non identiquement nul et posons:

$$m = \inf \{|a_i|, i = 0 \dots d, a_i \neq 0\}, \quad M = \sup \{|a_i|, i = 0 \dots d\}.$$

Si $\alpha \in \mathbf{R}$ est tel que $\alpha \neq 0$ et $P(\alpha) = 0$ on a:

$$\frac{m}{m+M} \leq |\alpha| \leq \frac{m+M}{m}$$

Dans la suite nous travaillerons essentiellement avec des polynômes à coefficients entiers, car ainsi nous n'aurons pas à nous occuper de la borne inférieure de la valeur absolue des coefficients, qu'il serait trop compliqué d'estimer lors d'opérations d'addition et de multiplication. Pour la borne supérieure, le lemme suivant, dont la preuve est laissée au lecteur, sera utile dans la preuve de la proposition 1.1. Adoptons la notation suivante: si $P(X_1, \dots, X_n)$ désigne un polynôme à coefficients réels, $H(P)$ désignera le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.

LEMME 2. Soient $P_i(Y) = \sum_{0 \leq h \leq q} a_h^i Y^h$, $i = 1 \dots k$ des polynômes de degré au plus q à coefficients dans \mathbf{R} et supposons que $|a_h^i| \leq H$, $\forall i, h$. Alors, si $P(Y) = P_1(Y) \dots P_k(Y)$ et $Q(Y) = P_1(Y) + \dots + P_k(Y)$ on a:

$$H(P) \leq (q+1)^{k-1} M^k, \quad H(Q) \leq kM.$$

LEMME 3. Soit $P(X) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha X^\alpha \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$, avec $|a_\alpha| \leq H$, $\#S \leq N$. Soit $b \in \mathbf{R}^n$ tel que $P(b) > 0$, $R = \sup\{1, \|b\|\}$, et soit $v \in \mathbf{R}^n$, $\|v\| = \varepsilon R$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Alors on a:

$$\varepsilon < \frac{P(b)}{dNHRR^{d-1}} \Rightarrow P(b+v) > 0$$

PREUVE:

$$\begin{aligned} |P(b+v) - P(b)| &= \left| \sum_{\substack{\alpha \in S \\ \beta < \alpha}} a_\alpha \binom{\alpha}{\beta} b^\beta v^{\alpha-\beta} \right| \leq H \left| \sum_{\substack{\alpha \in S \\ \beta < \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} R^{|\beta|} R^{|\alpha-\beta|} \varepsilon^{|\alpha-\beta|} \right| \\ &= H \sum_{\alpha \in S} R^{|\alpha|} \left((1+\varepsilon)^{|\alpha|} - \varepsilon^{|\alpha|} \right) \leq NHR^d \left((1+\varepsilon)^d - \varepsilon^d \right) \\ &\leq NHR^d d(1+\varepsilon)^{d-1} \varepsilon \leq NHR^d d 2^{d-1} \varepsilon \end{aligned}$$

RECHERCHE DE SOLUTIONS D'INÉQUATIONS POLYNOMIALES

où l'avant-dernière inégalité est une conséquence du théorème des accroissements finis. De là le résultat suit immédiatement.

PROPOSITION 1.1. *Soient $F_1, \dots, F_p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_p]$ des polynômes de degré respectivement m_1, \dots, m_p , $F_i(X) = \sum_{\alpha \in S_i} a_\alpha^i X^\alpha$, avec $|a_\alpha^i| \leq H$ et $\#S_i \leq N$, et supposons que les F_i soient de degré au plus q en X_p . Soit*

$$\Sigma_p = \{x_p \in \mathbb{C} \mid \exists x_1, \dots, x_{p-1} \in \mathbb{C} \text{ t.q. } F_i(x_1, \dots, x_p) = 0, i = 1 \dots p\}$$

et supposons que $\Sigma_p \neq \mathbb{C}$. Alors si $x_p \in \Sigma_p$ et $x_p \neq 0$, on a:

$$\frac{1}{1 + (q+1)^{\rho-1} (NH)^\rho \cdot \rho!} \leq |x_p| \leq 1 + (q+1)^{\rho-1} (NH)^\rho \cdot \rho! \quad \text{où} \quad \rho = \left(\sum_{p-1}^{m_i} \right)$$

PREUVE: Soit $V_m = (\mathbb{Z}[X_p])[X_1, \dots, X_{p-1}]_{\leq m}$ l'espace des polynômes de degré $\leq m$ en X_1, \dots, X_{p-1} , à coefficients dans les polynômes en X_p . V_m est un $\mathbb{Z}[X_p]$ -module libre avec base les X'^α , où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$, $|\alpha| \leq m$ et $X' = (X_1, \dots, X_{p-1})$. Posons $D = 1 + \sum_{i=1}^p (m_i - 1)$ et considérons l'application $\mathbb{Z}[X_p]$ -linéaire:

$$\phi : V_{D-m_1} \oplus \dots \oplus V_{D-m_p} \rightarrow V_D \quad , \quad \phi(A_1, \dots, A_p) = \sum A_i F_i .$$

On montre (voir [2] ou [3]) que:

$$\begin{aligned} \text{rang}(\phi) < \dim(V_D) &\iff \exists x^* = (x_0, \dots, x_p) \subset \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ &\text{t.q. } F_i^*(x^*) = 0, i = 1 \dots p , \end{aligned}$$

où $F_i^*(X_0, \dots, X_p)$ est l'homogénéisé de F_i , et on montre aussi que le diviseur commun des mineurs de rang maximal de ϕ est le résultant $R(X_p)$ de F_1, \dots, F_p par rapport à X_p . Puisque l'on a supposé que $\Sigma_p \neq \mathbb{C}$, il existe un mineur d'ordre maximal $\mu(X_p)$ de ϕ qui n'est pas identiquement nul, et qui s'annule forcément en x_p . On peut donc appliquer le lemme 1 à ce mineur, et pour cela nous allons estimer les coefficients de $\mu(X_p)$. Ecrivons: $F_i(X_1, \dots, X_p) = \sum_{\alpha \in S_i'} b_\alpha^i(X_p) \cdot X'^\alpha$. Si $X'^\beta \in V_{m_i}$, on aura: $\phi(X'^\beta) = \sum_{\alpha \in S_i'} b_\alpha^i(X_p) X'^{\alpha+\beta}$ et si $\mu_{\gamma,(\beta,i)}(X_p)$ désigne le coefficient de μ correspondant aux éléments de la base $X'^\beta \in V_{D-m_i}$ et $X'^\gamma \in V_D$:

$$\mu_{\gamma,(\beta,i)}(X_p) = \sum_{\substack{\alpha \in S_i' \\ \alpha+\beta=\gamma}} b_\alpha^i(X_p) ,$$

d'où l'on voit que les coefficients des puissances de X_p dans $\mu_{\alpha,\beta}(X_p)$ sont majorés par NH . Puisque $\dim(V_D) = \binom{D+p-1}{p-1} = \binom{\sum_{p-1}^{m_i}}{p-1} = \rho$, le mineur $\mu(X_p)$ est une somme de $\rho!$ termes de la forme:

$$\prod_{h=1 \dots \rho} \mu_{(\gamma_h, (\beta_h, i_h))}(X_p)$$

et les $\mu_{\gamma,(\beta,i)}(X_p)$ sont de degré au plus q . Donc, d'après le lemme 2 on a: $H(\mu(X_p)) \leq \rho!(q+1)^{\rho-1}(NH)^\rho$.

COROLLAIRE 1.2. Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme de degré d , $P(X) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha X^\alpha$, avec $|a_\alpha| \leq H$, pour tout $\alpha \in S$ et $\#S \leq N$. Soit c une valeur critique de P , $c \neq 0$. Alors:

$$\frac{1}{1 + 2^{r-1}(dNH)^r \cdot r!} \leq |c| \leq 1 + 2^{r-1}(dNH)^r \cdot r! \quad , \text{ où } r = \binom{d+n(d-1)}{n}.$$

PREUVE: On considère le système d'équations:

$$Y - P(X) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial X_i}(X) = 0, \quad i = 1 \dots n$$

On y applique la proposition 1.1, dans laquelle Y jouera le rôle de X_p , $p = n + 1$, H sera remplacé par dH et $q=1$.

On pose $\mu(n, d, N, H) = 2^{r-1}(dNH)^r \cdot r!$, que l'on notera aussi (abusivement) $\mu(P)$.

PROPOSITION 1.3. Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, $P(X) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha X^\alpha$ et soit $R \in \mathbb{N} - \{0\}$. Alors si $a \in \Omega_R^+$, $\exists b \in \Omega_R^+$ dans la même composante connexe de Ω_R^+ que a tel que

$$P(b) \geq \frac{1}{1 + \mu(n, d, N, NR^dH)}$$

PREUVE: Soit Ω_a la composante connexe de a dans Ω_R^+ et soit $b \in \Omega_a$ tel que $P(b) = \sup\{P(x), x \in \Omega_a\}$. Si $\|b\| < R$, alors $P(b)$ est une valeur critique de $P(X)$ et on applique le corollaire 1.2. Sinon, $\exists i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 < \dots < i_k$ tels que $|b_j| = R \Leftrightarrow j \in \{i_1, \dots, i_k\}$. On remplace $P(X)$ par le polynôme à $n - k$ variables obtenu en remplaçant X_j par b_j , $j \in \{i_1, \dots, i_k\}$ et on remarque que H peut être remplacé par NR^dH . Si $k < n$ on applique le corollaire 1.2, sinon $P(b) \geq 1$ puisque $P(X)$ est à coefficients entiers.

THÉORÈME I. Soit $P(X) = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha X^\alpha \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, $|a_\alpha| \leq H$, pour tout $\alpha \in S$ et $\#S \leq N$. Si $\exists a \in \mathbb{R}^n$, $\|a\| \leq R$, où R est un entier positif, tel que $P(a) > 0$, alors il existe b dans la même composante connexe de Ω_R^+ que a tel que:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R, \|x - b\| < \rho\} \subset \Omega_R^+$$