Astérisque

E. Dubois
R. Paysant-Le Roux

Sur la longueur du développement en fraction continue de $\sqrt{f}(n)$

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 107-119
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__107_0>

SUR LA LONGUEUR DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE $\sqrt{f}(n)$

par

E. DUBOIS ET R. PAYSANT-LE ROUX

Introduction

On considère un polynôme $f(X)$ de degré pair à coefficients entiers dont le terme de plus haut degré est un carré et l'on s'intéresse à la longueur $\ell p(\sqrt{f}(n))$ de la période du développement en fraction continue de $\sqrt{f}(n)$ lorsque n est un entier rendant $f(n)$ positif non carré. SCHMIDT [1948] a considéré le cas $f(x) = X^2 + h$; SCHINZEL [1961] pour $f(X) = a^2X^2 + bX + c$, a introduit l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbf{Z} \mid (b^2 - 4ac) \text{ } ne \text{ } divise \text{ } pas \text{ } 4(2a^2n + b)\}$$

et a montré que :

(1) Pour les entiers n n'appartenant pas à E, la longueur de la période de $\sqrt{f}(n)$ est bornée ;

(2) Pour les entiers n de E, la limite de $\ell p(\sqrt{f}(n)$ tend vers l'infini avec n.

SCHINZEL [1962] a généralisé ce résultat pour un polynôme à coefficients entiers dont le terme de plus haut degré est un carré. LOUBOUTIN [1987] a donné une version effective de (2). Nous nous proposons de généraliser ce résultat à un polynôme $f(X)$ du type précédent et nous pourrons en déduire si le développement en fraction continue formelle de $\sqrt{f}(X)$ est periodique. Signalons que dans le cas d'un polynôme $f(X) = aX^d + \ldots$ avec d impair et a positif ou avec d pair et a positif non carré, SCHINZEL [1961] a montré que la limite supérieure de $\ell p(\sqrt{f}(n)$ est infinie. Dans une autre direction, on peut citer les résultats de COHN [1977] : pour m entier non carré on a avec une constante effective :

$$\ell p(\sqrt{m}) \ll \sqrt{m} \text{ } log \text{ } m.$$

1. Le cadre des meilleures approximations

1.1. les fractions continues formelles

Un élément $\alpha = \sum_{-h}^{\infty} a_i X^{-i}$ du corps des séries de Laurent $\mathbf{Q}((1/X))$ se décompose en $E(\alpha) + F(\alpha)$ où $E(\alpha) = a_{-h}X^h + ... + a_{-1}X + a_0$ joue le rôle de la partie entière, ou partie polynômiale ; on pose deg $\alpha = h$ si a_{-h} est non nul. A partir de $\alpha_0 = \alpha$ on détermine la suite (α_k) par $\alpha_k = F(\alpha_{k-1})^{-1}$. En posant $u_k = E(\alpha_k)$ on obtient le développement en fraction continue formelle $[u_0, u_1, ..., u_k, \ldots]$ de α auquel on associe les réduites A_k/B_k par les formules de récurrences habituelles provenant de $A_k/B_k = [u_0, u_1, \ldots, u_k]$.

PROPOSITION 1. — *Soit $W \in \mathbf{Q}((1/X))$ avec $W^2 \in \mathbf{Z}[X]$. Si le développement en fraction continue formelle de W est périodique, la prépériode est de longueur 1 et la période possède une symétrie. Si*

$$W = [u_0, \overline{u}_1, \ldots, u_\ell],$$

on a

$$u_\ell(X) = 2u_0(X), u_j(X) = u_{\ell-j}(X) \; pour \; 1 \le j \le \frac{\ell}{2}.$$

Cette proposition semble classique mais tous les résultats bien connus du cas réel ne se prolongent pas toujours au cas formel. Par exemple on sait que le développement d'un nombre quadratique n'est pas toujours périodique.

Démonstration (schéma). Si

$$\beta = (A(X) + B(X)W)D(X)^{-1} = c_d X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \ldots$$

dans $\mathbf{Q}((1/X))$ avec $c_d \neq 0$ on pose

$$d = deg\beta, \beta' = (A(X) - B(X)W)D(X)^{-1}.$$

On dit que β est spécial si deg $(\beta) \geq 1$ et deg $(\beta') \leq 0$. On montre facilement les points suivants :

- si la fraction continue formelle de β est purement périodique alors β est spécial ;
- le successeur d'un nombre spécial est spécial ;

- parmi les prédécesseurs possibles d'un nombre spécial, il y a un seul nombre spécial ;
- si la fraction continue de W, avec $W^2 = f(X)$, est périodique, alors le développement de $\alpha = W + E(W)$ est purement périodique.

Soit maintenant $W = [u_0, u_1, \ldots]$ périodique ; alors

$$\alpha = [2u_0, u_1, ..., \overline{u_k, u_{k+1}, ..., u_{k+\ell-1}}]$$

est aussi périodique. Posons $\beta = [\overline{u_k, u_{k+1}, ..., u_{k+\ell-1}}]$. Le nombre α étant spécial tous ses successeurs le sont. Pour $k > 1$ les nombres $\gamma = u_{k-1}\beta^{-1}$ sont deux prédécesseurs spéciaux de β. Il sont donc égaux et on a $u_{k-1} = U_{k+\ell-1}$. De proche en proche on obtient $\alpha = [2u_0, u_1, \ldots, u_{\ell-1}]$. En remarquant que

$$-1/\alpha' = \alpha_1 = [\overline{u_1, u_2, ..., u_{\ell-1}, 2u_0}],$$

on obtient la symétrie annoncée et la proposition.

1.2. Meilleures approximations et fractions continues

Soit $f(X) = a^2X^{2d} + ... \in \mathbf{Z}[X]$ avec a entier positif. On considère $W = aX^d + ... \in \mathbf{Q}((1/X))$ vérifiant $W^2 = f(X)$. Pour tout entier n rendant $f(n)$ positif non carré, on pose $w = \sqrt{f}(n)$. On note $\mathbf{O}_x$ l'anneau $\mathbf{Q}[X]+\mathbf{Q}[X]W$ et $\mathbf{O}_n$ l'anneau $\mathbf{Z} + \mathbf{Z}w$.

Nous définissons ici les meilleures approximations de w et de W et nous donnons rapidement, le lien avec les fractions continues réelles ou formelles, et la manière de lire les propriétés classiques des fractions continues (voir [2] et [7]).

Traitons d'abord le cas réel. Pour $\zeta = p - qw$, avec $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$, on pose $\mid \zeta \mid_1 = \mid \zeta \mid$ et $\mid \zeta \mid_2 = \mid p + qw \mid$. On dit que ζ est *une meilleure approximation* de w si et seulement si pour tout $\delta \in \mathbf{O}_n = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}w$, vérifiant $\mid \delta \mid_1 < \mid \zeta \mid_1$ et $\mid \delta \mid_2 < \mid \xi \mid_2$ on a $\delta = 0$. Ces meilleures approximations sont définies au signe près. L'ensemble des meilleures approximations de w dans $]0, 1]$ forment une suite $1, \zeta_1, \zeta_2, ...$ ordonnée par $\mid \zeta \mid$ décroissant et tendant vers 0. Cette suite est en bijection avec la suite des réduites p_k/q_k du développement en fraction continue de w par la relation $\zeta_{k+1} = \mid p_k - q_k w \mid$ pour $k \geq 0$. De même les meilleures approximations supérieures a 1 sont rangées par $\mid \zeta \mid_1$ croissant : $1, \zeta_{-1}, \zeta_{-2}, ...$

On note ε l'unité fondamentale dans $]0,1[$ de l'ordre $\mathbf{O}_n$. La périodicité du développement en fraction continue s'exprime par $\zeta_{k+\ell} = \pm\varepsilon\zeta_k$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$. D'autre part, la définition montre que si $\zeta = p - qw$ est une meilleure approximation de w, son conjugué $\zeta' = p + qw$ l'est aussi. On obtient alors la suite des meilleures approximations positives :

$$\ldots \mid \zeta'_\ell \mid, \mid \zeta'_{\ell-1} \mid, \ldots, \mid \zeta'_1 \mid, 1, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{\ell-1}, \zeta_\ell = \varepsilon, \ldots$$

Pour tout entier k,on a $\mid \zeta'_k \mid = \zeta_{\zeta-k}$ et avec la périodicité on a $\zeta_j = \varepsilon \mid \zeta'_{\ell-j} \mid$ pour $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Ceci exprime la propriété de symétrie de la période du développement $w = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots a_2, a_1, 2a_0}]$. Si la longueur ℓ est paire, il y a un terme médiant a'_h avec $h = \frac{l}{2}$, et on a $\zeta_h = \pm\zeta'_h$. En résumé :

PROPOSITION 2. — *Avec les définitions et notations précédentes, les meilleures approximations positives de w forment une suite (ζ_k) vérifiant $\zeta_0 = 1, \zeta_\ell = \varepsilon$ et $\zeta_{k+\ell} = \varepsilon\zeta_k$; on a $\zeta_j = \varepsilon \mid \zeta'_{\ell-j} \mid$ pour $j = 1, 2, \ldots, \ell$. Le lien avec les réduites s'exprime par $\zeta_{k+1} = \mid p_k - q_k w \mid$ pour $k \geq 0$.*

Revenons au cas formel. Pour $\beta = A(X) + B(X)W \in \mathbf{O}_x$ on définit les deux valeurs absolues $\mid \beta \mid_1 = e^{\deg \beta}$ et $\mid \beta \mid_2 = \mid \beta' \mid_1$. On peut prendre la même définition que dans le cas réel : β est une meilleure approximation de W si et seulement si pour tout γ de $\mathbf{O}_x$ tel que $\mid \gamma \mid_1 < \mid \beta \mid_1$ et $\mid \gamma \mid_2 < \mid \beta \mid_2$ on a $\gamma = 0$. Ces meilleures approximations sont définies à un facteur multiplicatif rationnel non nul près. Les meilleures approximations de W de degré négatif forment une suite $1, \beta_1, \beta_2$, ... qui est en bijection avec la suite des réduites de W par la relation $\beta_{k+1} = A_k - B_k W$ modulo $\mathbf{Q}*$. La périodicité (de longueur ℓ) du développement en fraction continue de W se traduit par l'existence d'une unité ε de $\mathbf{O}_x$ telle que

$$\beta_{k+\ell} = \varepsilon\beta_k \ (modulo\ \mathbf{Q}*)$$

pour tout $k \geq 0$, mais contrairement au cas réel ε n'est pas toujours l'unité fondamentale de $\mathbf{O}_x$, même si ℓ est minimale. Nous précisons cette particularité au paragraphe suivant.

Signalons que toute unité ε de $\mathbf{O}_x$ est une meilleure approximation, que si ζ est une meilleure approximation, il en va de même pour $\varepsilon\zeta$, et que comme dans le cas réel la notion de meilleure approximation ainsi exprimée donne une démonstration élégante de la propriété de symétrie de la période de W et de la