Astérisque

DAVID-OLIVIER JAQUET

# Classification des réseaux dans $\mathbb{R}^7$ (via la notion de formes parfaites)

*Astérisque*, tome 198-199-200 (1991), p. 177-185
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__177_0>

# CLASSIFICATION DES RESEAUX DANS $\mathbb{R}^7$
# (via la notion de formes parfaites)

par

David-Olivier JAQUET

## 1. Introduction

On part d'une forme quadratique réelle à $n$ variables, définie positive. On peut écrire cette forme de la façon suivante :

$Q(x) = x^t Ax$ où $A$ est une matrice symétrique réelle définie positive.

Nous allons étudier la restriction de $Q(x)$ à $x \in \mathbb{Z}^n$. Tout d'abord, remarquons que $A$ peut être considérée comme la matrice des produits scalaires d'une base de $\mathbb{R}^n$. On montre facilement que cette base est unique à isométrie près. Restreindre $Q(x)$ à $x \in \mathbb{Z}^n$ revient à ne considérer que les combinaisons linéaires entières des vecteurs de cette base, c'est-à-dire les points du *réseau* engendré par les vecteurs de cette base. $Q(x)$ nous donne alors le carré de la distance euclidienne entre le point $x$ du réseau et l'origine.

On appelle *minimum* de $A$, noté $\min A$, le minimum sur $\mathbb{Z}^n \backslash \{O\}$ de $Q(x)$. C'est donc le carré de la distance euclidienne à l'origine, du point du réseau le plus proche de $O$.

Les paires de vecteurs $\pm v_k \in \mathbb{Z}^n$ $(k = 1, \ldots, s)$, qui vérifient

$$v_k{}^t A v_k = \min A$$

s'appellent les *vecteurs minimaux* de $A$.

Dans le but de donner une classification des réseaux de $\mathbb{R}^n$, on introduit des relations "naturelles" d'équivalence entre réseaux :

– les isométries (pas d'influence sur $A$),

- les changements de base dans $GL_n(\mathbb{Z})$,
- les homothéties.

Un invariant important de cette classification est l'invariant d'Hermite $\mu$ :

$$\mu(A) = \frac{\min A}{\sqrt[n]{\det A}}$$

Cet invariant est borné pour $n$ fixé. On rencontre, dans la littérature, diverses inégalités relatives à la fonction $\mu$. Je ne citerai que celle de MINKOWSKI, liée à la géométrie des nombres, $\mu(A) < n$ si $n \geq 2$. D'autre part, $\mu$ atteint ses maxima ; les formes correspondant à ces maxima sont dites *extrêmes*. On montre que, modulo les homothéties, les maxima sont isolés et, qu'à équivalence près, il n'existe qu'un nombre fini de formes extrêmes. Le maximum absolu est appelé $\gamma_n$.

On connait les valeurs de $\gamma_n$ pour $n \leq 8$ :

$$\gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{4}{3}} \quad \gamma_3 = \sqrt[3]{2} \quad \gamma_4 = \sqrt{2}$$

$$\gamma_5 = \sqrt[5]{8} \quad \gamma_6 = \sqrt[6]{\frac{64}{3}} \quad \gamma_7 = \sqrt[7]{64} \quad \gamma_8 = 2\ .$$

VORONOÏ, essentiellement à l'aide des notions de formes parfaites et de domaines associés aux formes parfaites, donne une méthode de réduction des formes quadratiques définies positives, de même qu'un algorithme permettant de calculer les maxima de la fonction $\mu$, donc en particulier $\gamma_n$. VORONOÏ donne aussi un critère, maintenant classique, pour les formes extrêmes et montre qu'il n'existe qu'un nombre fini de formes parfaites inéquivalentes en dimension $n$.

## 2. Formes parfaites

Pour comprendre ce qu'est une forme parfaite, il faut en quelque sorte inverser le procédé de départ. Connaissant $A$, on a, tout d'abord, calculé les vecteurs minimaux $\pm v_k \in \mathbb{Z}^n$ associés à $A$. Maintenant, connaissant les $v_k$ et ayant effacé $A$, peut-on retrouver $A$ ? Ou encore, $A$ est-elle l'unique solution du système d'équations linéaires ${v_k}^t B v_k = \min A$, $(k = 1, \ldots, s)$ ? Si oui, on dit que $A$ est *parfaite*.

Donc une forme est dite parfaite si la connaissance des coordonnées entières de ses vecteurs minimaux dans une base du réseau permet de retrouver la matrice des produits scalaires de cette base, c'est-à-dire $A$.

Par contre, la connaissance des vecteurs minimaux considérés comme points d'un réseau plongé dans $\mathbb{R}^n$ ne caractérise pas la forme, ni même le réseau. On connaît, en effet, des exemples de formes parfaites, non équivalentes, pour lesquelles les vecteurs minimaux plongés dans $\mathbb{R}^n$ coïncident.

On peut tout de même faire la remarque évidente suivante : lorsqu'on plonge un réseau dans $\mathbb{R}^n$, les points correspondant aux vecteurs minimaux sont sur une sphère centrée à l'origine. Les formes associées à ce réseau sont parfaites si et seulement si le seul ellipsoïde dans $\mathbb{R}^n$ qui passe par ces points est la sphère.

### 3. Domaine associé à une forme parfaite

Plaçons-nous, maintenant, dans l'espace des matrices symétriques réelles $n \times n$, qui est de dimension $N = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ; on identifie cet espace à $\mathbb{R}^N$ qu'on rend euclidien via le produit scalaire $A \cdot B =$ Trace $AB$.

A chaque vecteur minimal $v_k$, on peut faire correspondre un point ${\lambda_k}^2$ dans cet espace : on pose ${\lambda_k}^2 = v_k {v_k}^t$. (On remarque, au passage, que ${\lambda_k}^2 \cdot A = \min A$.)

A chaque ${\lambda_k}^2$, on associe alors la demi-droite qui part de l'origine et contient ${\lambda_k}^2$. L'enveloppe convexe de ces demi-droites est appelée *domaine* associé à $A$.

On peut montrer que $A$ est parfaite si et seulement si son domaine est de dimension maximale.

On appelle *faces* de dimension $N-1$ du domaine, les intersections de ce domaine avec ses hyperplans d'appui.

Une face de dimension $d$ ($d < N-1$) est une variété de dimension $d$ obtenue en intersectant des faces de dimension $N-1$.

Définissons, maintenant, une action de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des formes quadratiques (définies ou non), en considérant tout élément de $GL_n(\mathbb{Z})$ comme une matrice de changement de base. Cette action induit une action de $GL_n(\mathbb{Z})$ sur l'ensemble des domaines de VORONOÏ. On dira que deux domaines sont équivalents s'ils appartiennent à la même orbite.

On montre facilement que deux domaines sont équivalents si et seulement si les formes parfaites correspondantes sont équivalentes.

## 4. Quelques résultats dus à Voronoï

4.1 Deux domaines ne peuvent être en contact que par leurs bords (faces de dimension $d \leq N-1$).

4.2 Soit une face $F$ de dimension $N-1$ appartenant à un domaine. Alors $F$ appartient également à un autre domaine. Géométriquement, ces deux domaines se situent de part et d'autre de $F$. Ces deux domaines sont dits *voisins* ou *contigus*.

4.3 Toute forme quadratique définie positive appartient au moins à un domaine.

4.4 Soient deux domaines quelconques. Il existe un chemin reliant ces deux domaines qui, à chaque pas, ne fait que passer d'un domaine à un domaine voisin.

4.5 A équivalence près, il n'existe qu'un nombre fini de formes parfaites en dimension $n$, donc qu'un nombre fini de domaines inéquivalents.

Le problème actuel est d'obtenir la liste exhaustive des domaines inéquivalents en dimension $N$, ainsi que leurs faces. Il est judicieux d'injecter, dans la théorie comme dans la pratique, le groupe des automorphismes de chacune des formes. Il faut comprendre automorphisme dans le sens d'isométrie de la forme à coefficients entiers.

Tout automorphisme de la forme induit de manière canonique une application linéaire de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, qui laisse le domaine de la forme globalement invariant.

## 5. Problème en dimension n=7 (N=28)

Pourquoi s'intéresser particulièrement à la dimension $n = 7$ ? La raison est historique :

$n = 3$ Le problème a été résolu par GAUSS en 1831. GAUSS a montré que $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ représente la seule forme parfaite à équivalence près. Par conséquent, le réseau cubique à faces centrées qui correspond à cette forme est le seul réseau absolument extrême en dimension $n = 3$.