Astérisque

JEAN-FRANÇOIS JAULENT

Noyau universel et valeurs absolues

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 187-208

http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__187_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

à la mémoire de Georges POITOU

NOYAU UNIVERSEL ET VALEURS ABSOLUES

par

Jean-François JAULENT

L'objet de l'exposé est de présenter quelques unes des relations entre la ℓ -partie du noyau universel de la K -théorie pour un corps de nombres K contenant les racines ℓ -ièmes de l'unité, et le noyau des valeurs absolues principales définies sur le ℓ -adifié du groupe des idèles de K , et ce à la lumière des conjectures de Leopold et de Gross généralisées.

En fait, cette note trouve sa motivation dans de récents travaux de M. Kolster (cf. [10]) et de K. Kramer (cf. [11]), qui recourent des résultats antérieurs de l'auteur (cf. [9]) et de T. Nguyen Quang Do (cf. [13]) obtenus par d'autres voies, et mettent plus particulièrement en valeur le rôle non explicité jusqu'ici d'un noyau remarquable que l'on peut construire très facilement en s'aidant des valeurs absolues ℓ -adiques principales (c'est à dire des valeurs absolues à valeurs ℓ -adiques) attachées aux places non complexes d'un corps de nombres quelconque.

Notre point de départ sera donc la théorie ℓ -adique du corps de classes, élaborée dans [9], et que nous allons brièvement rappeler :

1 - Le ℓ -adifié du groupe des idèles d'un corps de nombres.

Fixons une fois pour toutes un nombre premier ℓ , et considérons un corps de nombres K arbitraire (mais de degré fini sur $\mathbb{Q}$).

Le groupe des idèles classique de K est défini depuis Chevalley comme le produit restreint

$$J_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)}^{res} K_{\mathfrak{p}}^{\times}$$

des groupes multiplicatifs des complétés respectifs de K en ses diverses places. Le facteur $K_p^\times$ désigne donc soit le groupe divisible $\mathbb{C}^\times$ si $\mathfrak{p}$ est complexe ; soit le groupe $\mathbb{R}^\times = \{\pm 1\} \times \mathbb{R}_+^\times$, si $\mathfrak{p}$ est réelle ; soit, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique au-dessus d'un premier p , le produit

$$K_p^\times = \mu_p^\circ \cdot U_p^1 \cdot \pi_p^{\mathbb{Z}}$$

du groupe fini μ_p° des racines de l'unité dans K_p d'ordre étranger à p , du sous groupe U_p^1 des unités principales de K_p , et du $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par une uniformisante arbitraire π_p .

Dans aucun des cas $K_p^\times$ n'est donc un $\mathbb{Z}_\ell$ -module. Aussi, pour construire un $\mathbb{Z}_\ell$ -module à partir de $K_p^\times$, la solution la plus économique consiste-t-elle à former la limite projective

$$\mathcal{K}_p^\times = \varprojlim_n K_p^\times K_p^{\times \ell^n}$$

des quotients ℓ -primaires de $K_p^\times$. Cela étant, le passage au quotient ayant pour effet de tuer la partie ℓ -divisible de $K_p^\times$, le groupe obtenu est évidemment trivial lorsque $\mathfrak{p}$ est complexe, et égal à $(-1)^{\mathbb{Z}_\ell/2\mathbb{Z}_\ell}$ lorsque $\mathfrak{p}$ est réelle, donc encore trivial sauf pour $\ell = 2$ auquel cas il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Enfin, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, deux cas se présentent :

- ou bien $\mathfrak{p}$ est modérée (i.e. étrangère à ℓ) et

$$\mathcal{K}_p^\times = \mu_p \cdot \pi_p^{\mathbb{Z}_\ell}$$

s'identifie au produit du ℓ -sous-groupe de Sylow μ_p de μ_p° et du $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre engendré par l'image de l'uniformisante π_p (image que nous continuerons par abus à noter π_p)

- ou bien $\mathfrak{p}$ est sauvage (i.e. au-dessus de ℓ) et

$$\mathcal{K}_p^\times = U_p^1 \pi_p^{\mathbb{Z}_\ell}$$

est le produit du sous-groupe U_p^1 des unités principales de $\mathcal{K}_p^\times$ et du $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre engendré par l'image de π_p (que nous écrirons encore π_p).

Dans tous les cas, $\mathcal{K}_p^\times$ est ainsi un $\mathbb{Z}_\ell$ -module noethérien (donc compact pour sa topologie naturelle de $\mathbb{Z}_\ell$ -module) et il est commode d'écrire

$$\mathcal{K}_p^\times = \mathcal{U}_p \cdot \pi_p^{\mathbb{Z}_\ell}$$

en convenant de prendre $\pi_{\mathfrak{p}} = -1$, si $\mathfrak{p}$ est réelle, lorsque ℓ vaut 2.

Il est alors naturel de définir le ℓ -adifié $\mathcal{J}_K$ du groupe des idèles J_K comme le produit restreint

$$\mathcal{J}_K = \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)}^{\text{res}} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$$

c'est-à-dire comme la réunion pour tous les ensembles finis S de places de K

$$\mathcal{J}_K = \bigcup_{S \subset Pl(K)} \mathcal{U}_K^S, \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_K^S = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{U}_{\mathfrak{p}};$$

et d'équiper $\mathcal{J}_K$ de la topologie limite inductive des topologies des $\mathcal{U}_K^S$, ces derniers étant regardés comme compacts en tant que produits de modules compacts (de sorte que la topologie de $\mathcal{J}_K$ n'est pas la restriction à $\mathcal{J}_K$ du produit des topologies des $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$, mais fait cependant de $\mathcal{J}_K$ une réunion dénombrable de modules compacts).

Si maintenant on prend comme ℓ -adifié du groupe des idèles principaux le tensorisé ℓ -adique

$$\mathcal{R}_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} K^{\times}$$

du groupe multiplicatif de K (qui joue donc le rôle du rayon dans la théorie), et qu'on envoie $\mathcal{R}_K$ dans $\mathcal{J}_K$ en s'aidant du plongement diagonal de $K^{\times}$ dans J_K , le résultat fondamental du corps de classes ℓ -adique est le suivant (cf. [9], th. I.1.13) :

THÉORÈME 1. - *Isomorphisme ℓ -adique du corps de classes - Le groupe $\mathcal{R}_K$ des idèles principaux s'identifie canoniquement à un sous-groupe fermé du groupe des idèles $\mathcal{J}_K$, et le quotient topologique*

$$\mathcal{C}_K = \mathcal{J}_K / \mathcal{R}_K$$

est un groupe compact, isomorphe comme tel au groupe de Galois $G_K = Gal(\overline{K}^{ab}/K)$ de la pro- ℓ -extension abélienne maximale de K .

Sans doute n'est-il pas inutile de rappeler, puisqu'elle intervient plus loin, comment s'exprime dans ce contexte la conjecture de Leopoldt. Désignons par μ_K le ℓ -groupe des racines de l'unité dans K (i.e. le ℓ -sous-groupe de Sylow de $K^{\times}$), puis, pour toute place non complexe $\mathfrak{p}$ de K , écrivons $\mu_{\mathfrak{p}}$ son homologue dans $K_{\mathfrak{p}}$. Cela posé, nous avons (cf. [9], Ch. I) :

CONJECTURE DE LEOPOLD GÉNÉRALISÉE.- Les idèles principaux (i.e. les éléments de $\mathcal{R}_K$), qui sont localement partout des racines de l'unité (dans $\mathcal{J}_K$) sont les racines globales de l'unité ; ce qui s'écrit :

$$\mathcal{R}_K \cap \prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)} \mu_{\mathfrak{p}} = \mu_K.$$

Bien entendu, les idèles concernés étant trivialement des unités (i.e. des éléments du tensorisé ℓ -adique $\mathcal{E}_K = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} E_K$ du sous-groupe des unités de $K^{\times}$), la conjecture précédente revient à affirmer que le rang ℓ -adique des unités de K est égal au nombre de Dirichlet, ce qui, lorsque K est totalement réel, est exactement le postulat initial de H.W. Leopoldt.

2 - Définition des valeurs absolues ℓ -adiques principales.

On sait que les valeurs absolues réelles (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^{\times}$) attachées aux diverses places du corps K , définies sur le groupe des idèles $\mathcal{J}_K$, sont telles que leurs restrictions à $K^{\times}$ satisfont la formule du produit :

$$\prod_{\mathfrak{p} \in Pl(K)} |x|_{\mathfrak{p}} = 1, \quad \forall x \in K^{\times}.$$

Pour obtenir un analogue dans $\mathcal{J}_K$, il est nécessaire de définir des valeurs absolues à valeurs non plus dans $\mathbb{R}_+^{\times}$, mais dans le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_{\ell}^{\times}$, en fait dans son sous-groupe principal $U = 1 + \ell\mathbb{Z}_{\ell}$. Pour cela, on peut procéder comme suit : soit

$$\langle \rangle : \mathbb{Z}_{\ell}^{\times} \longrightarrow U = 1 + \ell\mathbb{Z}_{\ell}$$

la surjection canonique de $\mathbb{Z}_{\ell}^{\times}$ dans U , qui a pour noyau le sous-groupe des racines $(\ell - 1)$ -ièmes de l'unité dans $\mathbb{Z}_{\ell}$.

DÉFINITION 2. - Pour chaque place $\mathfrak{p}$ de K , on définit sur $\mathcal{J}_K$ une valeur absolue $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ à valeurs dans $U = 1 + \ell\mathbb{Z}_{\ell}$, qui se factorise via le complété profini $\mathcal{K}_{\mathfrak{p}}^{\times}$, en posant pour tout $\mathfrak{x} = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ de $\mathcal{J}_K$:

- (i) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = 1$, si $\mathfrak{p}$ est complexe ;
- (ii) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = \langle sg(x_{\mathfrak{p}}) \rangle$, si $\mathfrak{p}$ est réelle ;
- (iii) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = \langle N_{\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{p}})} \rangle$, si $\mathfrak{p}$ est ultramétrique, mais étrangère à ℓ ;
- (iv) $|\mathfrak{x}|_{\mathfrak{p}} = \langle N_{K_{\mathfrak{p}}/\mathbb{Q}_{\ell}}(x_{\mathfrak{p}}) N_{\mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{p}})} \rangle$, enfin, si $\mathfrak{p}$ divise ℓ .