Astérisque

PH. SATGÉ

Quelques problèmes de rationalité liés au théorème de Poncelet

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 295-304
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__295_0>

QUELQUES PROBLÈMES DE RATIONALITÉ LIÉS AU THÉORÈME DE PONCELET

par

Ph. SATGÉ

§0. Introduction. Soit S une conique non singulière du plan projectif sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, soit c un entier naturel, et soit Λ un pinceau linéaire (i.e. un système linéaire de dimension 1) de diviseurs effectifs de degré $c+1$ de la conique S ; le théorème de Poncelet affirme l'existence d'une, et d'une seule, courbe C de degré c possédant la propriété suivante : pour chaque élément D de Λ, tous les points d'intersections des tangentes à S issues des différents points du support de D sont sur la courbe C. Récemment plusieurs auteurs ont donné des démonstrations très élégantes de ce théorème et ont étudiés en détail les propriétés géométriques des courbes C que ce théorème attache aux systèmes linéaires (courbes que, dans la suite, nous appellons courbes de Poncelet) ; on peut, par exemple, trouver un résumé de ces travaux dans le papier de Trautmann [Tr]. Notons que ces travaux sont essentiellement géométriques, c'est à dire qu'ils ne s'interessent qu'aux propriétés et à la classification des courbes sur un corps de base algébriquement clos. Ici, au contraire, nous fixons notre attention sur un corps de base quelconque de caractéristique 0 (par exemple un corps de nombres) et nous discutons les propriétés des courbes de Poncelet relatives à ce corps de base k. Plus précisément nous supposons, dans le théorème de Poncelet, que la conique non singulière S du plan projectif est définie sur k; nous nous interessons alors aux deux problèmes suivants : d'une part trouver les conditions à imposer à un pinceau de S pour que la courbe de Poncelet qui lui est associée soit définie sur k, et d'autre part classer les courbes sur k obtenues de cette manière. Curieusement, ces deux questions très naturelles ne semblent pas avoir fait l'objet d'une étude systématique ; c'est cette étude que nous commençons ici. Ce travail est divisé en deux paragraphes. Dans le paragraphe 1 nous résolvons le premier de ces problèmes en montrant que la courbe de Poncelet associée à un pinceau de S est définie sur k si et seulement si le pinceau est invariant par

S.M.F.
Astérisque 198-199-200 (1991)

le groupe de Galois $Gal(\overline{k}/k)$ dans un sens que nous précisons ; nous discutons ensuite quelques propriétés des pinceaux qui possèdent cette propriété. Dans le paragraphe 2, nous abordons le deuxième problème en nous limitant au cas $c = 2$, donc au cas où les courbes de Poncelet sont des coniques ; nous montrons alors le résultat suivant : chaque fois qu'une telle conique de Poncelet est définie sur k, elle est isomorphe sur le corps k à la conique de base S.

Nous avons cherché, dans ce papier, à rester le plus élémentaire possible du point de vue du langage géométrique employé. Nous précisons assez longuement au début du paragraphe 1 le vocabulaire et les notations que nous employons dans la suite (principalement en ce qui concerne les corps de définition). Nous nous sommes limité dans le second paragraphe à l'étude du cas $c = 2$ qui est particulièrement simple ; signalons cependant que c'est le cas $c = 3$ qui a motivé notre étude ; dans ce cas les courbes de Poncelet sont des cubiques, donc des courbes arithmétiquement beaucoup plus intéressantes que les coniques. Techniquement l'étude de ce cas, et plus généralement des cas $c > 2$, est beaucoup plus difficile ; nous comptons revenir sur ces questions dans un autre travail.

Je remercie J.L. Colliot-Thélène pour ses nombreuses remarques (et en particulier pour la démonstration du Lemme 2.5.)

§1. Les questions de rationalités. Commençons par préciser le cadre géométrique dans lequel nous nous plaçons et les notations que nous utilisons. Nous désignons par $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$ l'anneau des polynômes à trois variables et à coefficients dans $\overline{k}$, et par $\mathbf{P}^2$ l'ensemble des points du plan projectif à valeur dans $\overline{k}$, c'est à dire l'ensemble des classes d'homothétie de triplets non nuls d'éléments de $\overline{k}$. Par courbe nous entendons un fermé de Zariski de dimension 1 de $\mathbf{P}^2$ (i.e. un fermé de Zariski dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension 1); si X est une courbe, nous notons $I(X)$ l'ideal homogène de l'anneau $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$ formé des polynômes qui s'annulent sur X; enfin si la courbe X est irréductible, i.e. si l'idéal $I(X)$ est premier, nous notons $\overline{k}(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X.

Le fait que l'on travaille en caractéristique 0 justifie les définitions et les assertions qui suivent (celles ci résultent, par exemple, du Lemme 2 et du théorème 7 du chapitre 1, paragraphe 7 de [We]). Nous faisons agir le groupe de Galois $G = Gal(\overline{k}/k)$ sur l'anneau de polynômes $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$, et sur l'ensemble des points du plan, de la façon suivante : l'image par $\sigma \in G$ du polynôme P est le polynôme ${}^{\sigma}P$ obtenu en remplaçant les coefficients de P par leurs images par σ; le résultat de l'action de $\sigma \in G$ sur le point $\underline{x}$ de coordonnées projectives

(x_0, x_1, x_2) est le point ${}^\sigma\underline{x}$ de coordonnées projectives $(\sigma(x_0), \sigma(x_1), \sigma(x_2))$. Si X est une courbe et si σ est un élément du groupe de galois G, on note ${}^\sigma X$ l'image de X par σ (i.e. l'ensemble des $({}^\sigma\underline{x})_{\underline{x}\in X})$; il est clair que ${}^\sigma X$ est une courbe et que $I({}^\sigma X) ={}^\sigma (I(X))$ (i.e. l'ensemble des $({}^\sigma P)_{P\in I(X)})$. Si X est irréductible, si f est un élément de $\overline{k}(X)$ qui s'écrit $\frac{P}{Q}$ avec P et Q polynômes homogènes de même degré de $\overline{k}[X_0, X_1, X_2]$, et si σ est un élément de G, alors la fonction sur ${}^\sigma X$ représentée par le quotient $\frac{{}^\sigma P}{{}^\sigma Q}$ ne dépend que de f (et non des choix de P et Q) ; on la note ${}^\sigma f$. L'application qui à f associe ${}^\sigma f$ est un isomorphisme du corps $\overline{k}(X)$ sur le corps $\overline{k}({}^\sigma X)$ (dont la restriction à $\overline{k}$ est σ). On dira que X est définie sur k si ${}^\sigma X = X$ pour tout $\sigma \in G$, c'est à dire ([We], lemme 2, loc.cit.) si l'idéal $I(X)$ admet une base sur le corps k. Ainsi ([We], théorème 7, loc.cit.), si X est irréductible et définie sur k, le sous corps $k(X)$ de $\overline{k}(X)$ formé des fonctions qui peuvent s'écrire comme quotient de deux polynômes homogènes de même degré à coefficients dans k, est une extension régulière de k; on sait que cela implique que $k(X)$ est le sous corps de $\overline{k}(X)$ fixé par l'action (semi linéaire) de G. En plus du corps k, nous aurons à considérer des extensions K de k contenues dans $\overline{k}$; pour un tel corps K nous notons G_K le groupe de galois $Gal(\overline{k}/K)$ (on a donc $G = G_k$), et $K(X)$ le sous corps de $\overline{k}(X)$ formé des fonctions qui peuvent s'écrire comme quotient de deux polynomes homogènes de même degré à coefficients dans K; comme ci dessus, $K(X)$ est une extension régulière de K, et donc est le sous corps de $\overline{k}(X)$ fixé par le groupe G_K.

Un diviseur sur une courbe X sera un diviseur au sens de Weil, i.e. une combinaison formelle à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (l'anneau des entiers rationnels) de points lisses de X. Si X est irréductible et si Δ est un diviseur sur X, on note $L(\Delta)$ le sous espace vectoriel de $\overline{k}(X)$ formé des fonctions f dont le diviseur (f) vérifie $(f)+\Delta \geq 0$. Si σ est un élément de G et si $\Delta = n_1(\mathrm{P}_1)+..+n_r(\mathrm{P}_r)$ est un diviseur de X (les n_i sont des éléments de $\mathbf{Z}$ et les P_i des éléments de X), alors $n_1({}^\sigma\mathrm{P}_1) + .. + n_r({}^\sigma\mathrm{P}_r)$ est un diviseur de ${}^\sigma X$ que l'on note ${}^\sigma\Delta$ et que l'on appelle l'image de Δ par σ; si X est irréductible, on a $L({}^\sigma\Delta) ={}^\sigma [L(\Delta)]$ (i.e. l'ensemble des $({}^\sigma f)_{f\in L(\Delta)})$. Si X est définie sur k, et si K est une extension de k contenue dans $\overline{k}$, on dit que Δ est rationnel sur K si ${}^\sigma\Delta = \Delta$ pour tout σ de G_K. Ainsi, si X est irréductible et définie sur k, et si Δ est un diviseur rationnel sur K, le groupe G_K agit semi linéairement sur le $\overline{k}-$espace vectoriel $L(\Delta)$; on note $L_K(\Delta)$ le sous ensemble de $L(\Delta)$ formé des éléments invariants par G_K. Les éléments de $L_K(\Delta)$ sont les éléments de $L(\Delta)$ qui appartiennent à $K(X)$, et la dimension du $K-$espace vectoriel $L_K(\Delta)$ est égale à la dimension du $\overline{k}-$espace vectoriel $L(\Delta)$. Enfin, si Λ est un pinceau linéaire sur la courbe irréductible X et si Δ est un diviseur sur X linéairement équivalent aux diviseurs du pinceau Λ, on note $L_\Lambda(\Delta)$ le sous ensemble de $L(\Delta)$ formé des fonctions dont le diviseur est de la forme $\mathrm{D} - \Delta$ avec D dans Λ; dire que Λ est un pinceau linéaire est équivalent à dire que $L_\Lambda(\Delta)$ est un $\overline{k}$−espace vectoriel de dimension 2. Si la courbe X est définie sur k, et si K est une extension de k contenue dans $\overline{k}$, on dit qu'un pinceau linéaire Λ est un K−pinceau si l'on peut trouver un diviseur Δ rationnel sur K, linéairement équivalent aux éléments de Λ, et tel que l'espace vectoriel $L_\Lambda(\Delta)$ est défini sur K, i.e. admet une base formée d'éléments de $L_K(\Delta)$; il en est ainsi si et seulement si $L_\Lambda(\Delta)$ est stable sous l'action de G_K. Notons que cette propriété ne dépend pas du choix du diviseur rationnel Δ, linéairement équivalent aux éléments de Λ, que l'on a choisi.

DÉFINITION 1.1. *Soit X une courbe définie sur le corps k, soit Λ un pinceau linéaire sur X, et soit K une extension de k contenue dans $\overline{k}$. On dit que le pinceau Λ est G_K−invariant si, pour tout diviseur D de Λ et tout $\sigma \in G_K$, l'image de D par σ est encore dans Λ.*

Dans la suite la courbe de base est une conique ; nous la notons S plutôt que X. Il est clair qu'un K−pinceau est un pinceau G_K−invariant ; nous verrons qu'il existe des pinceaux G_K−invariants qui ne sont pas des K−pinceaux. L'introduction de la notion de pinceau G_K−invariant est justifiée par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.2. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k, Λ un pinceau linéaire sur S, et K une extension de k contenue dans $\overline{k}$. La courbe de Poncelet C associée à Λ est définie sur K si et seulement si le pinceau Λ est G_K−invariant.*

Démonstration : Soit σ un élément de G; par la définition des courbes de Poncelet, la courbe ${}^\sigma C$, transformée de la courbe de Poncelet attachée à Λ par σ, est la courbe de Poncelet attachée au pinceau ${}^\sigma\Lambda$, transformé de Λ par σ (c'est à dire au pinceau dont les éléments sont les transformés par σ des diviseurs de Λ). On a donc ${}^\sigma C = C$ si et seulement si ${}^\sigma\Lambda = \Lambda$, et notre assertion en résulte immédiatement.

Étudions plus en détail les pinceaux G_K−invariants sur une conique non singulière définie sur k.

LEMME 1.3. *Soit S une conique non singulière définie sur le corps k, soit $d > 0$ un entier naturel, et soit K une extension de k contenue dans $\overline{k}$. Si la conique S possède un diviseur effectif de degré d rationnel sur K, alors tout pinceau linéaire de degré d sur S qui est G_K−invariant est un K−pinceau.*

Démonstration : Désignons par Δ un diviseur sur S qui est effectif, de degré