NORBERT SCHAPPACHER

Les conjectures de Beilinson pour les courbes elliptiques

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 305-317

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__305_0>

Les Conjectures de Beilinson pour les courbes elliptiques

Norbert Schappacher

Table des Matières

0. Remarques préliminaires

Dans ce rapport qui se veut une introduction pour non-spécialistes, j'essaie de décrire ce qu'on sait — et ce qu'on ignore — des conjectures de Beilinson relatives aux valeurs spéciales aux points entiers de la fonction L d'une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$. Quelques remarques préliminaires s'imposent.

D'abord, force est de constater que le point de vue des courbes elliptiques proposé ici n'est pas suggéré par la nature des conjectures et résultats en jeu, mais par le désir de rester aussi concret que possible. En fait, nous verrons à plusieurs endroits que le formalisme de Beilinson a tendance à nous faire sortir du cadre des courbes elliptiques.

Soulignons d'ailleurs que 'courbe elliptique' veut dire ici : 'courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$'. Ceci est essentiel; car dans toutes les conjectures motiviques sur des valeurs spéciales de fonctions L, on traite une variété (plus généralement un motif) V définie sur un corps de nombres K par l'intermédiaire de sa restriction des scalaires à $\mathbf{Q}$, $R_{K/\mathbf{Q}}V$. Si V est une courbe elliptique, alors $R_{K/\mathbf{Q}}V$ est une variété abélienne sur $\mathbf{Q}$ de dimension $[K : \mathbf{Q}]$, ce qui nous jetterait dans des eaux bien plus froides que celles du cas des courbes .....

Le cadre des courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$ — pour peu naturel qu'il soit — me permet d'éviter dans cet exposé le formalisme général et abstrait des conjectures de Beilinson. Bien sûr, le prix qu'on paie est que les diverses méthodes présentées ici sembleront vraiment différentes. Le lecteur intéressé pourra se rapporter aux premiers chapitres du livre [Rapoport, Schappacher, Schneider 1988] pour la théorie générale. D'autre part, à la fin, on mentionnera brièvement quelques résultats obtenus depuis la rédaction de ce livre.

Dernière remarque préliminaire: l'approche qu'on prend ici retrace partiellement l'évolution historique des conjectures dont la version générale et actuelle est due à Beilinson.

1. La fonction L

Soit E une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$. La fonction L de E est définie par le produit eulérien suivant, convergent pour tout $s \in \mathbf{C}$, $\Re(s) > 3/2$.

$$L(E,s) = \prod_p L_p(E,s)^{-1}, \tag{1.0}$$

où, pour tout nombre premier p de *bonne réduction* pour E — c'est-à-dire pour tout p tel qu'on puisse trouver une équation pour E qui, lue *modulo* p, définit une courbe non-singulière $\tilde{E}_p$ sur le corps fini $\mathbf{F}_p$ — le facteur eulérien en p est donné par

$$L_p(E,s) = (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}); \quad a_p = p + 1 - |\tilde{E}_p(\mathbf{F}_p)|. \tag{1.1}$$

Nous ne précisons pas ici les facteurs eulériens aux *mauvaises places* p — mais *voir* (3.4). De même nous ne définissons pas ici le *conducteur* N de la courbe E. C'est un entier positif divisible précisément par les nombres premiers où E a mauvaise réduction.

Posons

$$\Lambda(E,s) = N^{s/2}\Gamma(s)(2\pi)^{-s}L(E,s).$$

On conjecture que cette fonction possède un prolongement holomorphe à tout le plan complexe satisfaisant à l'équation fonctionnelle suivante, valable pour tout $s \in \mathbf{C}$:

$$\Lambda(E,s) = w\ \Lambda(E, 2-s), \tag{1.2}$$

avec un nombre réel w de valeur absolue 1, donc: $w = \pm 1$.

Cette conjecture est connue précisément dans les cas où on sait que $L(E, s)$ est la transformée de Mellin d'une forme modulaire parabolique sur $\Gamma_o(N)$. Ceci s'exprime de façon géométrique en disant que E est paramétrée par une courbe modulaire $X_o(N)$. C'est-à-dire qu'il existe une application non-constante $\phi: X_o(N) \longrightarrow E$ définie sur $\mathbf{Q}$. On conjecture, d'après Taniyama et Shimura, que toute courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ admet une telle paramétrisation, et, d'après Weil, cette conjecture découlerait de certaines propriétés analytiques — dont l'équation fonctionnelle ci-dessus — de certaines fonctions du même type que la fonction $L(E, s)$.

Nous supposerons par la suite que E soit paramétrée par une courbe modulaire $X_o(M)$. Nous disposerons donc du prolongement analytique de $L(E, s)$; mais cette hypothèse nous permettra aussi de faire certaines constructions 'modulaires' ....

Choisissons en fait pour M l'entier positif minimal pour lequel une paramétrisation $\phi: X_o(M) \longrightarrow E$ existe. Alors on sait, d'après une longue suite de travaux dont le plus récent est dû à Carayol [Carayol 1983], que c'est le conducteur de E: $M = N$.

2. Le centre de symétrie

Le but des conjectures de Beilinson relatives à E est de prédire, à un facteur rationnel non nul près, la valeur $L^{(r)}(E, n)$ de la première dérivée non nulle de la fonction $L(E, s)$ en tout entier s. Le premier point qui vient à l'esprit — et dans un sens le plus critique — est $s = 1$, le centre de symétrie de l'équation fonctionnelle. Or, l'ordre r de L en $s = 1$ aussi bien que la valeur $L^{(r)}(E, n)$ font l'objet des *conjectures de Birch et Swinnerton-Dyer*. Ce 'point central' $s = 1$ est aussi traité par les conjectures générales de Beilinson. Mais il en représente un cas limite. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle les adaptations nécessaires dans le cadre de Beilinson pour traiter le point central ne sont que brièvement mentionnées dans [Rapoport, Schappacher, Schneider 1988]. Soucieux de présenter les conjectures de Beilinson à l'état pur, nous laisserons de même de côté le point $s = 1$ dans la suite de cet exposé.

3. En sortant du centre

En dehors du centre $s = 1$, l'équation fonctionnelle (1.2), jointe à la convergence du produit eulérien (1.0) aux entiers > 1, détermine déjà l'ordre de $L(E, s)$ aux points entiers: $L(E, n) \neq 0$ pour $n \geq 2$ et $L(E, m) = 0 \neq L'(E, m)$ pour $m \leq 0$.

Le premier couple de nombres qu'il s'agit de caractériser à un multiple rationnel près est donc

$$L'(E, 0) \quad \text{et} \quad L(E, 2). \tag{3.0}$$

Bloch — *voir* [Bloch 1978] — a formulé et développé la conjecture de Beilinson relative à ces valeurs.[1]

D'après Bloch, on conjecture que les nombres (3.0) sont liés à des régulateurs de certains éléments du groupe $K_2(E)$. Nous ne reprenons pas la définition de ce K-groupe de Quillen.[2] Mais nous allons en voir quelques éléments. Pour le moment, disons simplement qu'on construit une application 'régulateur' sur $K_2(E)$ que nous écrivons de façon un peu naïve en choisissant une différentielle non nulle $\omega \in H^0(E, \Omega^1)$ définie sur $\mathbf{R}$;

$$r_\omega: K_2(E) \longrightarrow \mathbf{R}. \tag{3.1}$$

[1] Avant on savait interpréter des valeurs spéciales de la fonction zêta d'un corps de nombres de façon K-théorique, grâce au travail de Borel [Borel 1974] — *cf.* aussi les conjectures de Lichtenbaum.

[2] L'article fondamental reste, bien sûr, [Quillen 1973].

Le folklore du sujet dit que le noyau de l'homomorphisme r_ω est précisément $K_2(E)_{tors}$.[3] Donc, *si* $K_2(E)$ est de rang 1 *modulo* torsion — *cf.* la conjecture [Bloch 1978, p. 512] —, *alors* l'image de r_ω serait un réseau dans $\mathbf{R}$. Tensoriser par $\mathbf{Q}$ en ferait une $\mathbf{Q}$-droite dans $\mathbf{R}$, dont on conjecture que c'est l'unique $\mathbf{Q}$-droite dans $\mathbf{R}$ qui contient $\omega_1 L'(E,0)$, où

$$\omega_1 = \left| \int_{E^\circ(\mathbf{R})} \omega \right| \tag{3.2}$$

est la période réelle de la différentielle choisie.

En fait, le rang de $K_2(E)$ ne vaut pas toujours 1, *i.e.*, n'est pas toujours égal à l'ordre du zéro de $L(E,s)$ en $s = 0$. Ceci a été remarqué par Bloch et Grayson [Bloch, Grayson 1986], à l'aide de calculs sur ordinateur, pour certaines courbes elliptiques. Pour comprendre ce qui se passe, il faut considérer de plus près l'arithmétique de la courbe E. Ecrivons une partie de la suite exacte de localisation [Quillen 1973, §7, Prop. 3.1] du modèle régulier $\mathcal{E}$ relative à sa fibre générique E :[4]

$$\coprod_p K_2'(\mathcal{E}_p) \longrightarrow K_2(\mathcal{E}) \longrightarrow K_2(E) \xrightarrow{\partial=\coprod \partial_p} \coprod_p K_1'(\mathcal{E}_p) \longrightarrow (\text{torsion ?}) \tag{3.3}$$

Ici, le premier terme est de torsion et les conjectures générales de Beilinson impliquent que le dernier terme est réduit à son sous-groupe de torsion. Mais les groupes K_1'[5] des fibres spéciales du modèle régulier se calculent explicitement, mise à part la torsion : $K_1'(\mathcal{E}_p) \otimes \mathbf{Q}$ est non nul si et seulement si E a mauvaise réduction multiplicative déployée en p. Autrement dit, si la réduction $\tilde{E}_p$ en p est une courbe singulière avec un point double dont les droites tangentes sont déjà définies sur le corps $\mathbf{F}_p$, non seulement sur $\mathbf{F}_{p^2}$. Dans ce cas on trouve $L_p(E,s) = 1 - p^{-s}$ de sorte qu'on a

$$dim_{\mathbf{Q}}\, K_1'(\mathcal{E}_p) \otimes \mathbf{Q} = 1 = \operatorname{ord}_{s=0} L_p(E,s). \tag{3.4}$$

Les *Conjectures de Beilinson* relatives aux nombres (3.0) s'énoncent alors comme ceci:

3.5 Conjecture.

(i) $dim_{\mathbf{Q}}\, K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q} = 1$.

(ii) $r_\omega(K_2(\mathcal{E}) \otimes \mathbf{Q}) = \omega_1 . L'(E,0)\, \mathbf{Q}$.

4. Problèmes de K-théorie

En essayant de traiter cette conjecture on se heurte à deux difficultés contradictoires : d'une part on ignore si $K_2(E) \otimes \mathbf{Q}$ est un espace vectoriel de dimension finie; d'autre part on a du mal à construire explicitement des éléments non nuls dans cet espace.

---

[3] L'analogie avec le cas des corps de nombres est souvent appropriée. Ici on peut se souvenir de l'application logarithmique sur les unités d'un corps de nombres qui définit son régulateur. — *Cf.* la note suivante.

[4] Voici l'analogie avec le cas d'un corps de nombres k: dans ce cas, le K-groupe correspondant à $\zeta(k,0)$ et $\text{rés}_{s=1}\, \zeta(k,s)$ est K_1, et on a $K_1(k) = k^*$, mais $K_1(\mathcal{O}_k) = \mathcal{O}_k^*$: les unités, qui donnent le régulateur usuel.

[5] Ce sont les groupes analogues aux K-groupes, mais définis en termes de modules cohérents au lieu de modules projectifs. Les théories K' et K coincident sur les schémas réguliers. — Pour calculer les $K_1'(\mathcal{E}_p)$, on se sert de dévissages du type indiqués dans [Quillen 1973, §7, n° 3]. Il s'avère que, à torsion près, on obtient l'homologie du graphe dual de $\mathcal{E}$.