Astérisque

HANS PETER SCHLICKWEI

Résultats quantitatifs en approximation diophantienne

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 319-331

http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__319_0

© Société mathématique de France, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

RESULTATS QUANTITATIFS EN APPROXIMATION DIOPHANTIENTE

par

Hans Peter SCHLICKWEI

1. Le Théorème du Sous-espace quantitatif.

Rappelons le théorème de Roth [12]: *Soit α un nombre algébrique de degré $d \geq 2$, soit $\delta > 0$. Alors il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels $\frac{x}{y}$ tels que*

$$(1.1) \quad \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| < y^{-2-\delta}$$

soit satisfait.

Il est bien connu que ce résultat est ineffectif dans le sens suivant: la preuve ne permet pas d'obtenir des bornes supérieures pour *les valeurs absolues* $|x|, |y|$ des solutions de (1.1). En revanche on peut obtenir par la méthode de Roth des bornes supérieures pour *le nombre* de solutions $\frac{x}{y}$ de (1.1). (cf. Davenport et Roth [3], et plus récemment Bombieri et van der Poorten [1] et Luckhardt [8]). Remarquons que (1.1) est presque la même chose que

$$(1.2) \quad |y||y\alpha - x| < |\mathbf{x}|^{-\delta}$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$ et $|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dans (1.2) nous avons deux formes linéaires à coefficients algébriques $L_1(\mathbf{x}) = y$, $L_2(\mathbf{x}) = y\alpha - x$ qui sont linéairement indépendantes. La généralisation à n dimensions est le fameux théorème du sous-espace de Wolfgang Schmidt [20] (1972):

Soient $L_1(\mathbf{x}), \dots, L_n(\mathbf{x})$ des formes linéaires linéairement indépendantes à coefficients algébriques en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Soit $\delta > 0$. Considérons l'inégalité

$$(1.3) \quad |L_1(\mathbf{x}) \cdots L_n(\mathbf{x})| < |\mathbf{x}|^{-\delta}$$

où $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Alors il existe un nombre fini de sous-espaces propres $U_1, \dots, U_t$ de $\mathbb{Q}^n$ tels que chaque solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ de (1.3) soit contenue dans $\bigcup_{i=1}^t U_i$.

Ce théorème a été généralisé indépendamment par Dubois et Rhin [4] et par Schlickewei [13] au cas des valeurs absolues p -adiques.

Dans un travail récent Wolfgang Schmidt a trouvé comment donner une version quantitative de son théorème du sous-espace [22]. Ceci a été généralisé ensuite par Schlickewei aux valuations p -adiques [15] et aux corps des nombres [18]. Nous allons citer ici le résultat principal de [18]. Mais d'abord il nous faut introduire quelques notations.

Soit K un corps de nombres de degré d . Soit $M(K)$ l'ensemble des places de K . A chaque v dans $M(K)$ nous associons la valeur absolue $|\cdot|_v$, normalisée de la manière habituelle: sur $\mathbb{Q}$ on a $|\cdot|_v = |\cdot|$ (valeur absolue standard) si v est archimédienne et $|p|_v = p^{-1}$ si v est au-dessus du nombre premier p . Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$ et pour $v \in M(K)$ nous posons

$$|\alpha|_v = \begin{cases} \sqrt{|\alpha_1|_v^2 + \cdots + |\alpha_n|_v^2} & \text{pour } v \text{ archimédienne} \\ \max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|_v & \text{pour } v \text{ nonarchimédienne,} \end{cases}$$

et nous écrivons

$$\|\alpha\|_v = |\alpha|_v^{d/d}$$

où $d_v = [K_v : \mathbb{Q}_v]$ est le degré local du complété K_v . Finalement nous définissons la hauteur (projective) de α par

$$H(\alpha) = \prod_{v \in M(K)} \|\alpha\|_v.$$

Etant donnée une forme linéaire $L(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ à coefficients dans K nous définissons

$$\|L\|_v = \|\alpha\|_v \quad \text{et} \quad H(L) = H(\alpha).$$

THÉORÈME 1. [18] Soit K une extension normale de $\mathbb{Q}$ de degré d . Soit S un sous-ensemble de cardinalité s de $M(K)$. Pour chaque $v \in S$, soient $L_1^{(v)}, \dots, L_n^{(v)}$ des formes linéaires en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, à coefficients dans K , linéairement indépendantes. Soit $0 < \delta < 1$. Considérons l'inégalité

$$(1.4) \quad \prod_{v \in S} \prod_{i=1}^n \frac{\|L_i^{(v)}(\boldsymbol{\beta})\|_v}{\|L_i^{(v)}\|_v \|\boldsymbol{\beta}\|_v} < H(\boldsymbol{\beta})^{-n-\delta}.$$

Alors il existe des sous-espaces propres $S_1, \dots, S_{t_1}$ de K^n avec

$$(1.5) \quad t_1 = c(n, d, s, \delta) = \left[(8sd)^{2^{34nd}} s^6 \delta^{-2} \right]$$

tels que chaque solution $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ de (1.4) ou bien soit contenue dans $\bigcup_{i=1}^{t_1} S_i$ ou bien ait une hauteur satisfaisant

$$(1.6) \quad H(\boldsymbol{\beta}) < \max \left\{ (n!)^{\frac{9}{\delta}}, \quad H(L_i^{(v)})^{\frac{9nsd}{\delta}} \quad (v \in S; i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Le résultat quantitatif de W. Schmidt [22] traite le cas où S contient une seule valeur absolue archimédienne et où les solutions $\boldsymbol{\beta}$ sont prises dans $\mathbb{Q}^n$.

La partie intéressante dans le Théorème 1 est le fait que la borne (1.5) pour le nombre de sous-espaces ne dépende que du degré d de K , de la dimension n , du nombre des valeurs absolues intervenant, et de δ . En particulier la constante ne dépend pas du discriminant du corps, elle ne dépend pas des formes $L_i^{(v)}$ ni des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ correspondants aux valeurs absolues nonarchimédiennes dans S . Nous allons voir plus bas que ce théorème donne des bornes supérieures uniformes pour le nombre de solutions d'une grande classe d'équations diophantiennes.

2. Réduction du Théorème 1 au cas rationnel.

Dans [15] nous avons démontré l'énoncé suivant, que est une variante du Théorème 1 dans laquelle les solutions sont rationnelles.

THÉORÈME 2. [15] Soit K un corps de nombres de degré d . Soit R un sous-ensemble de $M(\mathbb{Q})$ de cardinalité r contenant la place à l'infini. Pour chaque

$v \in R$, on choisit une extension $| \cdot |_v$ de v à K , et on se donne des formes linéaires $L_1^{(v)}, \dots, L_n^{(v)}$ en $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ à coefficients dans K , linéairement indépendantes. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Considérons l'inégalité

$$(2.1) \quad \prod_{v \in S} |L_1^{(v)}(\mathbf{x}) \cdots L_n^{(v)}(\mathbf{x})|_v < \left(\prod_{v \in S} |\det(L_1^{(v)}, \dots, L_n^{(v)})|_v \right) |\mathbf{x}|^{-\varepsilon}.$$

Alors il existe des sous-espaces propres $T_1, \dots, T_{t_2}$ de $\mathbb{Q}^n$ avec

$$(2.2) \quad t_2 = \left[(8sd!)^{2^{26n}} s^6 \delta^{-2} \right]$$

tels que chaque solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ de (2.1) ou bien soit contenue dans $\bigcup_{i=1}^{t_2} T_i$ ou

bien ait une norme $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ vérifiant

$$(2.3) \quad |\mathbf{x}| < \max \left\{ (n!)^{\frac{8}{\varepsilon}}, \quad H(L_i^{(v)}) \quad (v \in S, i = 1, \dots, n) \right\}.$$

Nous ne parlerons pas ici de la preuve du Théorème 2. Nous remarquons seulement qu'elle a besoin de toute la machinerie de Thue–Siegel–Roth–Schmidt. Au lieu de donner des détails sur cela nous nous contenterons d'indiquer comment on peut déduire le Théorème 1 du Théorème 2.

Pour transformer (1.4) en une forme ressemblant à (2.1) nous remarquons d'abord que pour chaque $v \in S$ nous avons

$$\|L_1^{(v)}\|_v \cdots \|L_n^{(v)}\|_v \leq \|\det(L_1^{(v)}, \dots, L_n^{(v)})\|_v (H(L_1^{(v)}) \cdots H(L_n^{(v)}))^{d_v}.$$

On voit immédiatement que si

$$H(\boldsymbol{\beta})^{\frac{\delta}{2}} > H^{nds} \text{ où } H = \max\{H(L_i^{(v)}) \mid v \in S; i = 1, \dots, n\}$$

alors (1.4) implique

$$(2.4) \quad \prod_{v \in S} \frac{\|L_1^{(v)}(\boldsymbol{\beta}) \cdots L_n^{(v)}(\boldsymbol{\beta})\|_v}{\|\boldsymbol{\beta}\|_v^n} < \left(\prod_{v \in S} \|\det(L_1^{(v)}, \dots, L_n^{(v)})\|_v \right) H(\boldsymbol{\beta})^{-n - \frac{\delta}{2}}.$$

Notons que (2.4) est homogène en $\boldsymbol{\beta}$. Par conséquent nous pouvons supposer sans perte de généralité que le vecteur $\boldsymbol{\beta}$ dans (2.4) a des composantes entières algébriques dans K .