C. SOULÉ

Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants

Astérisque, tome 198-199-200 (1991), p. 355-371
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1991__198-199-200__355_0>

GEOMETRIE D'ARAKELOV
ET
THEORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

par

C. SOULÉ

0. Introduction

0.1. Les travaux récents de VOJTA [23] et FALTINGS [8] ont établi un lien remarquable entre la théorie de l'approximation des nombres algébriques et la théorie d'Arakelov. Celle-ci permet d'étendre le résultat classique de Thue-Siegel-Dyson-Gel'fond à des courbes de genre supérieur à un, obtenant ainsi une nouvelle preuve de la conjecture de MORDELL [23] et, plus généralement, de montrer des résultats de finitude sur les points rationnels de certaines sous-variétés des variétés abéliennes [8]. Nous tâcherons ici de présenter les résultats principaux de la géométrie d'Arakelov, et d'indiquer comment elle intervient dans ces travaux.

0.2. L'objectif premier de la géométrie d'Arakelov est l'étude des fibrés algébriques sur les variétés arithmétiques, munis d'une métrique hermitienne sur le fibré holomorphe associé. Que cette notion soit importante dans l'étude des équations diophantiennes se voit dès la définition de la hauteur d'un point P de l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{Q})$ (hauteur "naïve"). En effet, si $L_P \subset \mathbb{Z}^{N+1}$ désigne le $\mathbb{Z}$-module libre de rang un formé de 0 et des divers choix de coordonnées homogènes entières de P, la hauteur (logarithmique) de P est un invariant du fibré inversible L_P sur Spec $(\mathbb{Z})$ muni de la norme $\| \ \|$ induite par la métrique standard sur $\mathbb{C}^{N+1}$ (l'opposé de son degré arithmétique, cf. (8) ci-dessous) :

$$h(P) = \log \|s\| \ , \tag{1}$$

où s est n'importe quel générateur de L_P, i.e. un choix $(x_0, \ldots, x_N) \in \mathbb{Z}^{N+1}$ de coordonnées sans diviseur commun, et

$$\|s\|^2 = \sum_{i=0}^{N} |x_i|^2 \ .$$

0.3. Un autre exemple est donné par les fonctions auxiliaires des démonstrations de transcendance, ou d'approximation des nombres algébriques. Considérons par exemple la preuve du théorème de Dyson. Etant donné un nombre algébrique α de degré m sur $\mathbb{Q}$, et $\varepsilon > 0$, ce théorème affirme qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres rationnels p/q tels que

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^{\sqrt{2m}+\varepsilon}} \ .$$

Pour le montrer on prouve qu'il existe un polynôme à coefficients entiers en deux variables $P(x,y) \neq 0$, homogène de degré (d_1, d_2), dont la taille est (explicitement) bornée et qui s'annule beaucoup au point (α, α), ainsi que ses dérivées. Plus précisément, son indice en ce point, i.e.

$$\sigma = \operatorname{Sup} \left\{ s \in \mathbb{R} \text{ tel que, si } \frac{i_1}{d_1} + \frac{i_2}{d_2} < s \text{ , alors } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i_2} P(\alpha, \alpha) = 0 \right\},$$

est grand. Etant données deux bonnes approximations p_1/q_1 et p_2/q_2 de α, on étudie alors l'indice de P en $(p_1/q_1, p_2/q_2)$ pour conclure que q_2/q_1 doit rester borné.

On peut voir un tel polynôme P comme une section du fibré en droites $\mathcal{O}(d_1, d_2)$ sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, dont il faut contrôler la norme.

0.4. Une conséquence du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique (Théorème 1 ci-dessus) est une borne sur les sections non nulles d'un fibré ample sur une variété arithmétique (Théorème 2). Une variante de cet énoncé est une des étapes de la preuve de VOJTA [23] (cf. §.2).

0.5. FALTINGS généralise dans [8] le travail de VOJTA au cas des variétés abéliennes. Une extension astucieuse de la méthode classique de construction de la fonction auxiliaire lui permet d'éviter l'usage du théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique. Il a cependant recours à la théorie d'Arakelov pour la définition et l'étude d'une hauteur pour les variétés projectives sur un corps de nombres. On verra ci-dessous (Théorème 3) que cette hauteur est essentiellement celle définie par PHILIPPON [7] [8], c'est à dire la hauteur logarithmique des coordonnées de Chow de cette variété. PHILIPPON utilise cette notion pour obtenir des critères d'indépendance algébrique [17], améliorant des résultats de NESTERENKO.

0.6. Cet article ne présente pas de résultat original, si ce n'est le Théorème 3 (dont une version voisine a été obtenue, indépendamment, par PHILIPPON). Les deux premiers paragraphes sont principalement un résumé des travaux de GILLET et l'auteur.

Je remercie D. BERTRAND pour plusieurs discussions, et pour m'avoir parlé de la hauteur des variétés projectives.

1. Un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique

1.1. Appelons *variété arithmétique* la donnée d'un schéma X régulier, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, et *fibré hermitien* sur X la donnée $\overline{E} = (E, h)$ d'un fibré algébrique E sur X et d'une métrique hermitienne lisse h sur le fibré holomorphe $E_{\mathbb{C}}$ induit par E sur l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X. Nous supposerons aussi que h est invariante par l'involution de conjugaison complexe, notée F_∞.

Choisissons une métrique Kählerienne, invariante par F_∞, sur $X(\mathbb{C})$. On peut alors associer à tout fibré hermitien $\overline{E}$ sur X un nombre réel $\chi(\overline{E})$, analogue arithmétique de la caractéristique d'Euler-Poincaré. Il est défini comme suit. Pour tout entier $q \geq 0$, on sait que le groupe de cohomologie cohérente $H^q(X, E)$ est un groupe abélien de type fini. On désigne par $\sharp H^q(X, E)_{\text{tors}}$ le cardinal de son sous-groupe de torsion.

Par ailleurs, soit $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$ l'espace des formes différentielles de type $(0, q)$ sur $X(\mathbb{C})$ à coefficients dans $E_{\mathbb{C}}$. Les métriques choisies sur $E_{\mathbb{C}}$ et $X(\mathbb{C})$ fournissent un produit scalaire $< \, , \, >_{L^2}$ sur $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$: étant données deux telles formes η et η' on pose

$$< \eta, \eta' >_{L^2} = \int_{X(\mathbb{C})} < \eta(x), \eta'(x) > \frac{\omega_0^n}{n!} \tag{2}$$

où $n = \dim(X/\mathbb{Z})$ et

$$\omega_0 = \sum_{\alpha,\beta} \frac{i}{2\pi} h_X \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right) dz_\alpha d\bar{z}_\beta \tag{3}$$

pour tout choix de coordonnées locales z_α sur $X(\mathbf{C})$ (h_X est la métrique choisie sur l'espace tangent de $X(\mathbf{C})$).

L'espace vectoriel complexe engendré par $H^q(X,E)$ s'identifie à celui des formes harmoniques de type $(0,q)$ sur $X(\mathbf{C})$ à coefficients dans $E_{\mathbf{C}}$:

$$(4) \qquad H^q(X,E)_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{C} \cong H^q(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}}) \cong \mathcal{H}^{0q}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}}).$$

Il est donc muni du produit scalaire L^2.

On désigne par $\mathrm{vol}_{L^2}(H^q(X,E))$ le volume, pour ce produit scalaire, du quotient $H^q(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}})^+/H^q(X,E)$ où $(\ )^+$ désigne le sous-espace invariant par F_∞.

L'opérateur de Cauchy-Riemann de $E_{\mathbf{C}}$

$$\overline{\partial} : A^{0q}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}}) \longrightarrow A^{0,q+1}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}})$$

admet un adjoint $\overline{\partial}^*$ pour le produit scalaire L^2. Le Laplacien

$$\Delta_q = \overline{\partial}\,\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$$

sur $A^{0q}(X(\mathbf{C}),E_{\mathbf{C}})$ possède une fonction zêta

$$\zeta_q(s) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-s}$$

où $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ désigne les valeurs propres non nulles de Δ_q (comptées avec multiplicité). Cette série converge si $\mathcal{R}e(s) > n$, et la fonction $\zeta_q(s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe, qui n'a pas de pôle en $s=0$. On peut donc prendre sa dérivée $\zeta_q'(0)$ en ce point.

On pose alors :

$$(5) \quad \chi(\overline{E}) = \sum_{q\geq 0}(-1)^q \left(\log \sharp H^q(X,E)_{\mathrm{tors}} - \log \mathrm{Vol}_{L^2} H^q(X,E) + \frac{1}{2}\, q\zeta_q'(0)\right) .$$

(Ce nombre réel est le degré arithmétique du fibré déterminant de la cohomologie de E, muni de la métrique de QUILLEN [16] [19] [2] [12]).

1.2. Notre objectif est de donner une formule pour $\chi(\overline{E})$. Pour ce faire on introduit des *groupes de Chow arithmétiques* $\widehat{CH}^p(X)$, $p \geq 0$, de la façon suivante [9] [10].